*Artículo de Investigación. Revista Ciencia e Ingeniería. Vol. 43, No. 2, pp. 129-136, abril-julio, 2022.*
*ISSN 1316-7081. ISSN Elect. 2244-8780 Universidad de los Andes (ULA)*

# Generalización de la exclusión mutual en manufactura usando redes de Petri

# Generalization of mutual exclusion in manufacturing using Petri nets

**Coello-Vera, Adalberto-Antonio[1*]; Solé-Aguilera, Luz-Estela[2].**
[1]Instituto de posgrado, Universidad Técnica de Manabí, Ecuador.
[2] Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes, Venezuela.
*adalbertocoellov@hotmail.com

**Resumen**

*Dadas las condiciones o especificaciones en un sistema de manufactura que contiene una exclusión mutual, siempre queremos construir una red de Petri cuya estructura y marcación inicial aseguren acotamiento, no bloqueo y reiniciabilidad en dicho sistema. La exclusión mutual es usada para dar solución a problemas de síntesis donde el recurso compartido se ocupa de operaciones sin elección. Este concepto será extendido a un caso más general donde sean establecidas operaciones con elección.*

**Palabras clave:** Sistema, manufactura, exclusión mutual, dinámica.

**Abstract**

*Given the conditions or specifications in a manufacturing system that contains a mutual exclusion, we always want to build a Petri net whose structure and initial marking ensure constraint, non-blocking and resettability in said system. Mutual exclusion is used to solve synthesis problems where the shared resource deals with choiceless operations. This concept will be extended to a more general case where operations with choice are established.*

**Keywords:** System, manufacturing, mutual exclusion, dynamics.

## 1 Introducción

Los sistemas de manufactura (Li Z y col., 2012) constituyen una clase importante de sistemas en el mundo actual, mientras el concepto de exclusión mutual es clave para el estudio de propiedades cualitativas tales como reiniciabilidad, acotamiento y no bloqueo (Mata y col., 2016, Zhou 2016).

La exclusión mutual expresa que si dos o más procesos están listos para ejecutar acciones diferentes, que dependen directamente de una entidad compartida común e indivisible, entonces dichos procesos no pueden ser ejecutados simultáneamente. Aquí, el recurso compartido se ocupa de operaciones sin elección.

Las redes de Petri (Murata T 1989, Peterson J y col., 1981) conforman un modelo apropiado para la representación de sistemas de manufactura conteniendo una exclusión mutual (Zhou y col., 1990). De hecho, uno siempre quiere que los sistemas de eventos discretos sean funcionalmente correctos. En consecuencia, el análisis formal es un aspecto primordial para la verificación de las propiedades antes mencionadas.

En este artículo serán formuladas las condiciones y los argumentos para la generalización del concepto de exclusión mutual, donde se establecen operaciones con elección.

## 2 Nociones preliminares

Una Red de Petri ($RP$) es un cuádruple $R = (L, T, E, S)$, donde $L = \{l_1, l_2, \cdots, l_n\}$ es un conjunto finito cuyos elementos serán llamados lugares, $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_k\}$ es un conjunto finito cuyos elementos serán llamados transiciones, $L \cap T = \emptyset$, $E: T \longrightarrow L^{\infty}$ es una función de entrada: para cada $t \in T$, $E(t) \in L^{\infty}$ es un multiconjunto de lugares de entrada para $t$ ( $L^{\infty}$ denota el conjunto de todos los multiconjuntos sobre $L$ con número ilimitado de ocurrencia de sus elementos); y $S: T \longrightarrow L^{\infty}$ es una función de salida: para cada $t \in T$, $S(t) \in L^{\infty}$ es un

multiconjunto de lugares de salida para $t$.
Una $RP$ marcada es un par $M = (R, m)$, donde $R$ es una $RP$ y $m: L \longrightarrow \mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \{0,1,2, \cdots\}$, es una función llamada función de marcación (o marcación): para cada $l_i \in L$, denotaremos por $m(l_i) \in \mathbb{N}$ al número de fichas en el lugar $l_i$; este especifica un vector $m = (m_1, m_2, \cdots, m_n)$, $n = card(L)$, con $m(l_i) = m_i$, $m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,2, \cdots, n$.

Las RP marcadas pueden ser representadas por multigrafos dirigidos bipartitos como sigue: los lugares son etiquetados por círculos y las transiciones por barras. Si un lugar $l_i$ es un lugar de entrada para una transición $t$, entonces hay $\#(l_i, E(t))$ (número de veces que $l_i$ está en el multiconjunto de lugares de entrada $E(t)$) arcos dirigidos del correspondiente círculo a la correspondiente barra. Si un lugar $l_j$ es un lugar de salida para la transición $t$, entonces hay $\#(l_j, S(t))$ (número de veces que $l_j$ está en el multiconjunto de lugares de salida $S(t)$) arcos dirigidos de la correspondiente barra al correspondiente círculo. Las fichas son representadas por puntos en el interior del círculo y así la función de marcación es representada por el número de puntos en el interior de cada círculo.
Una transición $t \in T$ en una $RP$ marcada $M = (R, m)$ es llamada habilitada si $m(l_i) \geq \#(l_i, E(t))$, para todo lugar $l_i \in L$. En este caso diremos que la transición $t$ es habilitada por la marcación $m$ o disparable desde $m$. El conjunto de transiciones habilitadas por la marcación $m$ es $\varepsilon(m) = \{t \in T \;/\; m(l_i) \geq \#(l_i, E(t)), \forall\, l_i \in L\}$.
Ahora, si $t \in \varepsilon(m)$ entonces la marcación $m'$ dada por $m'(l_i) = m(l_i) - \#(l_i, E(t)) + \#(l_i, S(t))$, $i = 1,2, \cdots, n$; $n = card\ L$, es llamada marcación alcanzable desde $m$ por el disparo de $t$. Así ,se obtiene una función de cambio de marcaciones, la cual puede ser extendida de manera natural; es decir, si la función de cambio de marcaciones $\delta: \mathbb{N}^n \times T \longrightarrow \mathbb{N}^n$, $n = card\ L$, es dada por $\delta(m, t) = m'$ donde $m'(l_i) = m(l_i) - \#(l_i, E(t)) + \#(l_i, S(t))$, $i = 1,2, \cdots, n$; entonces su extensión es la función parcial $\hat{\delta}: \mathbb{N}^n \times T^* \longrightarrow \mathbb{N}^n$, dada por $\hat{\delta}(m, \theta) = m$ y $\hat{\delta}(m, \sigma\, t) = \delta(\hat{\delta}(m, \sigma), t)$, $m \in \mathbb{N}^n$, $t \in T$, $\sigma \in T^*$. Aquí, $T^*$denota el monoide libre con unidad $\theta$: $T^*$ es el conjunto de todas las combinaciones finitas de elementos de $T$. Finalmente, como $\hat{\delta}$ es una extensión de $\delta$ no haremos distinción notacional entre ambas.
Por su parte, en una $RP$ marcada $M = (R, m_0)$, una marcación $m \in \mathbb{N}^n$, $n = card\ L$, será llamada alcanzable desde $m_0$ sí existe una sucesión de disparos de transiciones $\sigma = t_{j_1} t_{j_2} \cdots t_{j_k} \in T^*$ tal que $\delta(m_0, \sigma) = m$. Luego, el conjunto de alcanzabilidad de la $RP$ desde la marcación $m_0$ es dado por $A(R, m_0) = \{m \in \mathbb{N} \;/\; \exists\ \sigma \in T^*, \delta(m_0, \sigma) = m\}$.
Ahora, incluiremos algunas propiedades de $RP$ las cuales son útiles en un medio ambiente de manufactura.
Sea $M = (R, m_0)$ una $RP$ marcada. Un lugar $l \in L$ es llamado $k$-acotado si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m(l) \leq k$, para todo $m \in A(R, m_0)$. Si todos los lugares de la red son $k$-acotados, entonces la red es llamada $k$-acotada o simplemente acotada. . En particular, si la red es 1-acotada diremos que la red es segura. En manufactura el acotamiento implica, por ejemplo, ausencia de capacidad de desbordamiento y la seguridad determina la disponibilidad o no de un recurso simple.
Por otro lado, la red es llamada no bloqueada (viva) si para toda marcación $m \in A(R, m_0)$ y toda transición $t_i \in T$, existe una marcación $m' \in A(R, m_0)$ alcanzable desde $m$ tal que $t_i \in \varepsilon(m')$. En manufactura, el no bloqueo garantiza que el sistema no se estanca, lo cual implica que este puede producir exitosamente.
Finalmente, otra propiedad de interés es la reiniciabilidad, la cual garantiza que para toda marcación $m \in A(R, m_0)$, $m_0 \in A(R, m)$. En nuestro contexto la reiniciabilidad implica el comportamiento cíclico de un sistema.
Un sistema de manufactura es un conjunto de actividades que interactúan con un conjunto de recursos para obtener un producto. Un sistema de manufactura incluye un plan de proceso de producción (programa) que establece la precedencia entre actividades. La metodología de modelación para sistemas de manufactura usando $RP$ es fundamentada en las interpretaciones de lugares y transiciones tal como sigue:
1. Identificar las actividades y recursos necesarios para la producción de un artículo (producto);
2. Ordenar las actividades por las relaciones de precedencia tal como lo establece el programa;
3. Para cada actividad, crear y etiquetar un lugar para representar su estatus; luego, etiquetar una transición (comienzo de actividad) creando finalmente un arco desde la transición hasta el lugar. Por último crear una transición (completación de actividad) para incluir un arco desde el lugar a la transición. En general, la transición de completación para una actividad será la transición de comienzo para la nueva actividad.
Una ficha en un lugar de actividad especifica que la actividad está siendo ejecutada y la ausencia de fichas indica que la actividad no está siendo ejecutada. Múltiples fichas indicarán que la actividad está ocurriendo de manera múltiple;
4. Para cada actividad, crear y etiquetar un lugar para cada recurso que sea necesario para el comienzo de la actividad; luego, conectar todos estos lugares con la transición de comienzo de la actividad mediante arcos dirigidos desde los lugares a la transición de comienzo. Finalmente, dar un arco desde la transición de completación de la actividad a cualquier lugar de recurso que se haga disponible luego de la completación de la actividad.
Si un lugar representa un estatus de recursos, entonces una o más fichas en el lugar indican que el recurso está disponible y la ausencia de fichas indica la no

disponibilidad del recurso.
5. Especificar la marcación inicial.

Enfatizamos que un lugar representa un estatus de recurso o de operación. Denotaremos por $L_o$ al conjunto de lugares de operaciones. Ahora, denotaremos por $l_f =$ conjunto de lugares de recursos cuyo número es fijo y $L_v =$ conjunto de lugares de recursos cuyo número es variable. Finalmente, hemos particionado el conjunto de lugares $L$ como $L = L_o \cup L_f \cup L_v$. En la clase de sistemas que nos ocupa, para cualquiera $l \in L$ y $t \in T$, $0 \leq \#(l, E(t)) \leq 1$ y $0 \leq \#(l, S(t)) \leq 1$. Sea $R = (L, T, E, S)$ una $RP$. Un nodo en $R$ es un lugar $l \in L$ o una transición $t \in T$. Un camino elemental en $R$ es una sucesión de nodos $x_1 x_2 \cdots x_k$, $k \geq 1$, tal que si $k > 1$ entonces $x_i \neq x_j, \forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq k$. Esto será denotado por $c(x_1,\ x_k)$.
Por su parte, un circuito elemental en $R$ es una sucesión de nodos $x_1 x_2 \cdots x_k$, $k > 1$, tal que si $x_i = x_j$, $1 \leq i < j \leq k$, entonces $i = 1$ y j$= k$. Esto será denotado por $c(x_1)$. Sea $L = L_o \cup L_f \cup L_v$ una partición dos a dos disjunta de $L$. Un $O$-camino entre los nodos $x$ e $y$ es un camino elemental x$x_1 x_2 x_3 \cdots x_k y$ tal que $x_i \in L_o \cup T$, $\forall i, 1 \leq i \leq k; x, y \notin L_o$. Así, un $O$-camino es una sucesión finita de arcos que expresa una sucesión finita de actividades u operaciones. Note que, si un $O$-camino comienza y finaliza con transiciones y los lugares constituyendo el $O$-camino no tienen fichas inicialmente, entonces esto podría representar en manufactura una sucesión para algún tipo de trabajo.
Trataremos a $c(x_1,\ x_n)$ como un conjunto; por lo tanto, $x \in c(x_1,\ x_n)$ significa que $x$ es un nodo sobre el camino elemental entre $x_1$ y $x_n$. En este caso escribiremos $c(x_1,\ x_n) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. También, trataremos a $c(x_1,\ x_n)$ como el conjunto de todos los caminos elementales entre $x_1$ y $x_n$; análogamente, para $c(x_1)$. En consecuencia, si no hay caminos elementales entre $x_1$ y $x_n$ escribiremos $c(x_1,\ x_n) = \emptyset$. Finalmente, si $Y$ es un conjunto de nodos, entonces

$$c(x,\ Y) := \{w \ /\ \ \exists y \in Y, \exists\, c(x,\ y), w \in c(x,\ y)\}$$

es el conjunto de todos los nodos sobre los caminos elementales entre $x$ y $Y$.

## 3 Condiciones para los lugares de recursos y sincronización

Con la finalidad de formalizar el concepto de exclusión mutual, incluiremos las condiciones siguientes que determinan condiciones para la clasificación de lugares en una estructura $RP$

**Condición $\boldsymbol{CL}$**: Una $RP$ marcada $M = (R, m_o)$, $R = (L, T, E, S)$, con $L = L_o \cup L_f \cup L_v$ una partición dos a dos disjunta de $L$ especificando los conjuntos de $o$-lugares, $f$-lugares y $v$-lugares, posee la condición $CL$ si:

$$l' \in (L_f \cup L_v) \cap E(t_{j_i}), \qquad m_o(l') = 0,$$

$$m_o(l) = \begin{cases} 0, & si\ \ l \in L_o \\ \geq 1, & si\ l \in (L_f \cup L_v) \setminus \{l'\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad t_{j_i} \notin \varepsilon(m), \forall m \in A(R, m_o).$$

En este caso también diremos que $L_f \cup L_v$ satisface la condición $CL$.

**Observación 1**
Uno puede notar desde la condición $CL$ que ningún recurso en un lugar de $L_f \cup L_v$ puede ser transformado en un recurso en otro lugar diferente de $L_f \cup L_v$.

En un contexto de manufactura los lugares de recurso son incluidos para representar estatus de disponibilidad de máquinas, robots, materia prima, instalaciones, etc. Más aún, si dos fichas representan situaciones diferentes entonces estas no son surtidas en un mismo lugar (posiblemente representando alguna operación). De hecho, las fichas son incluidas para representar contenidos diferentes que van a un lugar idéntico mediante una transición común; es decir, mediante sincronización. Esta sincronización podría, por ejemplo, determinar el comienzo de una operación. Por lo tanto, las fichas de cualesquiera dos o más lugares de recursos fluyen en un lugar común solamente mediante la misma transición. Este comentario motiva la condición siguiente.

**Condición $\boldsymbol{S}$.** Una $RP$ marcada $M = (R, m_o)$, $R = (L_o \cup L_f \cup L_v, T, E, S)$, posee la condición $S$ si para cada par $l, l' \in L_f \cup L_v$, $l \neq l', t \in T$ y $O$-caminos $c(l, t)$ y $c(l', t)$, si existen, se tiene que el primer encuentro (o intersección) entre los $O$-caminos ocurre en una transición.

## 4 Exclusión Mutual en manufactura.

Esta sección está direccionada hacia el problema de análisis para sistemas de manufactura con un recurso compartido por procesos independientes. Para esto, formularemos el concepto de exclusión mutual ($EM$) en el contexto $RP$ he incluiremos las condiciones bajo las cuales las $RP$ conteniendo tal estructura son no bloqueadas, acotadas y reiniciables.
En lo que sigue, el $i$-ésimo proceso, $i = 1, 2, \cdots k$, será modelado por un par de transiciones $(t_{a_i}, t_{b_i})$ y el recurso compartido será modelado por un lugar $l_E$.

**Definición 1 ($k$-$EM$).** Sea $M = (R, m_o)$, $R = (L, T, E, S)$, $L = L_o \cup L_f \cup L_v$, una $RP$ marcada. Una $k$-exclusión mutual para $M$ ($k$-$EM$) es un par $(l_E, \varphi)$ tal que:

1) $l_E \in l_f$, $m_o(l_E) = 1$
y $\varphi \coloneqq \{(t_{a_1}, t_{b_1}), (t_{a_2}, t_{b_2}), \cdots, (t_{a_k}, t_{b_k})\}$, $k \geq 1$, es un conjunto finito de pares de transiciones satisfaciendo las condiciones siguientes:
1.1) $i \neq j, 1 \leq i, j \leq k \Rightarrow t_{a_i} \neq t_{b_j}, t_{a_i} \neq t_{a_j}, t_{b_i} \neq t_{b_j}$;
1.2) $t_{a_i} \neq t_{b_i}, 1 \leq i \leq k \Rightarrow \#(l_E, E(t_{a_i})) = \#(l_E, S(t_{b_i})) = 1, \#(l_E, S(t_{a_i})) = \#(l_E, E(t_{b_i})) = 0$; $t_u \notin T_a \cup T_b, T_a = \{t_{a_i} / \ 1 \leq i \leq k\}, T_b = \{t_{b_i} / \ 1 \leq i \leq k\} \Rightarrow \#(l_E, E(t_u)) = \#(l_E, S(t_u)) = 0$;
1.3) $1 \leq i \leq k, \ l \in l_v, \ l \in c(t_{a_i}) \Rightarrow t_{b_i} \in c(t_{a_i})$;
1.4) $1 \leq i \leq k, \ c(t_{a_i}) \cap (L_f \cup L_v) = \{l_E\} \Rightarrow t_{b_i} \in c(t_{a_i})$;
1.5) $1 \leq i \leq k, \ t \in T, \ t \in c(t_{a_i}, t_{b_i}) \Rightarrow t \in c(t_{a_i}, t_{b_i}) = O$-camino.

2) $L_f \cup L_v$ satisface las condiciones $CL$ y $S$; $t \in T_b$, $t' \in T_a \Rightarrow \nexists \ c(t, t') = O$-camino.

**Condiciones del comportamiento dinámico de una $RP$** $M = (R, m_o)$ conteniendo una $k$-exclusion mutual, con una clasificación de lugares dada.

1´) Existen una marcación $m_1$ y una sucesión de disparos de transiciones $\sigma$ que no contiene transiciones en $T_a$ tales que $t \in \varepsilon(\delta(m_1, \sigma))$, para todo $t \in T_a$ ($T_a$ es como en (1.2) de la definición 1).

2´) Para toda marcación $m_1$, si $t_{a_j}$ dispara en $m \in A(R, m_1)$ entonces para todo $t \in T$ tal que $c\left(t_{a_j}, t\right) \neq \emptyset$ y $t_{b_j} \notin c\left(t_{a_j}, t\right)$, t es permitida y para toda sucesión de disparos de transiciones $\sigma_j$ que no contiene a $t_{b_j}$ existe $h_j$ tal que $t_{b_j} \in \varepsilon\left(\delta\left(m, t_{a_j} \sigma_j h_j\right)\right)$; más aún, si $m(l_E) = 1$ y $t_u \in \varepsilon(m)$, entonces $t_u \notin T_b$($T_b$ es como en (1.2) de la definición 1).

**Proposición 1**. Sea $M' = (R', m'_o)$ conteniendo una $k$-$EM$ $(l_E, \varphi)$ y satisfaciendo las condiciones del comportamiento dinámico, con $R' = (L_o \cup (L_f \cup \{l_E\}) \cup L_v, T', E', S')$. Si existe una sucesión de disparo de transiciones $\sigma$ que no contiene a $t_{b_i}$ tal que $t_{a_i}\sigma t_{b_i}$ es disparable desde $m \in A(R', m'_o)$, entonces $\sigma$ no contiene a $t_{a_j}$, para todo $j, 1 \leq j \leq k$, e $i$, $1 \leq i \leq k$.

**Demostración:**

Desde la condición 2´) se sigue que el disparo de $t_{a_i}$ remueve la única ficha en $l_E$; en consecuencia, ninguna transición $t$ tal que $\#(l_E, E'(t)) = 1$ es habilitada antes del disparo de la transición $t_{b_i}$, para todo $i$, $1 \leq i \leq k$. De aquí que $t_{a_j}$ no puede disparar, para todo $j, 1 \leq j \leq k$. Por lo tanto, $\sigma$ no contiene a $t_{a_j}$ para todo $j, 1 \leq j \leq k$. ■

**Observación 2**. La proposición 1 establece que si el recurso compartido es ocupado por algún proceso, entonces este no puede ser utilizado por ningún otro proceso hasta que dicho recurso sea liberado.

**Proposición 2**. Sea $M' = (R', m'_o)$ una $RP$ marcada conteniendo una $k$-$EM$ $(l_E, \varphi)$ y satisfaciendo las condiciones del comportamiento dinámico, con $R' = (L_o \cup (L_f \cup \{l_E\}) \cup L_v, T', E', S')$. Entonces, $l_E$ es un lugar seguro.

**Demostración:**

La condición 2´) establece que ninguna transición en $T_b = \{t_{b_i} / \ 1 \leq i \leq k\}$ es habilitada cuando $m(l_E) = 1$; en consecuencia, $m(l_E) \leq 1$ para todo $m \in A(R', m'_o)$. Por lo tanto, $l_E$ es un lugar seguro. ■

En lo que sigue siempre supondremos dada una $RP$ marcada $M' = (R', m_o')$ conteniendo una $k$-$EM$ $(l_E, \varphi)$

y satisfaciendo las condiciones del comportamiento dinámico, con $R' = \left(L_o \cup \left(L_f \cup \{l_E\}\right) \cup L_v, T', E', S'\right)$, y una subred $M$ de $M'$, $M = (R, m_o)$, $R = \left(L_o \cup L_f \cup L_v, T, E, S\right)$: $T = T'$; $l \in L_o \cup L_f \cup L_v, t \in T \Rightarrow \#(l, E(t)) = \#(l, E'(t)), \#(l, S(t)) = \#(l, S'(t))$; $m_o(l) = m_o'(l)$.

**Teorema 1**. $M'$ es acotada (respectivamente segura) siempre que $M$ sea acotada (respectivamente segura).

**Demostración:**

Sea $M'$ una $RP$ marcada conteniendo una $k$-$EM$ $(l_E, \varphi)$, satisfaciendo las condiciones del comportamiento dinámico y $A(R', m'_o)$ el conjunto de alcanzabilidad de $M'$. Supongamos que $m(l_E)$ es la última componente de cualquier marcación $m \in A(R', m'_o)$, y consideremos el conjunto $Q(R', m'_o) = \{\mu \,/\, (\mu, m(l_E)) \in A(R', m'_o)\}$; Si $m \in A(R', m'_o)$, entonces $m$ es alcanzable desde $m'_o$ por los disparos sucesivos de transiciones determinados por alguna sucesión $\sigma$ ; es decir, $(\mu, m_o(l_E))$ es alcanzable desde $(m_o, 1)$ por el disparo de $\sigma$. Por lo tanto, $\mu$ es alcanzable desde $m_o$ por el disparo de $\sigma$. En consecuencia, $m \in A(R, m_o)$. Como $A(R, m_o)$ es acotado entonces $\mu$ es acotado, y por la proposición 2 $m(l_E)$ es seguro. Finalmente $A(R', m'_o)$ es acotado. Por lo tanto, $M'$ es acotada. ■

**Teorema 2.** $M'$ es no bloqueada siempre que M sea no bloqueada.

**Demostración:**

Sea $M_k$ una $RP$ marcada conteniendo una $k$-$EM$ $(l_E, \varphi)$, satisfaciendo las condiciones del comportamiento dinámico y $A(R', m'_o)$ el conjunto de alcanzabilidad de $M_k$. Supongamos que $m(l_E)$ es la última componente de toda marcación en $A(R_k, m'_o)$ y consideremos el conjunto

$$Q(R_k, m'_o) = \{\mu \,/\, (\mu, m(l_E)) \in A(R_k, m'_o)\}.$$

Por inducción sobre $k$.
Para $k = 1$ ($M_1$ contiene una 1-$EM$ $(l_E, \varphi)$ que satisface las condiciones del comportamiento dinámico, con $\varphi_1 = \{(t_{a_1}, t_{b_1})\}$ ) .

Sean $t \in T$ y $m \in A(R_1, m'_o)$, y supongamos que $m(l_E) = 1$, entonces $m = (\mu, 1)$. Ahora, supongamos que $m(l_E) = 0$ . Como $(l_E, \varphi)$ es una 1-$EM$, entonces existe una sucesión de disparos de transición $\sigma$ que permite a $t_{b_1}$. Sea $m'$ la marcación alcanzada por el disparo de $\sigma t_{b_1}$, con $m'(l_E) = 1$. Sea $m' = (\mu, 1)$, entonces $\mu \in A(R, m_o)$. Luego, para $\mu$ y $t$ en $M$ consideremos los casos: $c(t_{a_1}, t) \neq \emptyset$ o $c(t_{a_1}, t) = \emptyset$.
Supongamos que $c(t_{a_1}, t) \neq \emptyset$, entonces de el no bloqueo de $M$ existe una sucesión $\sigma$, que no contiene a $t_{a_1}$ en $M$, tal que $\mu'$ es alcanzable desde $\mu$ por el disparo de $\sigma$ y $t_{a_1}$es habilitada por $\mu'$. Luego, $\sigma$ puede disparar en $M_1$; de donde, $m''$ es alcanzable desde $m'$ por el disparo de $\sigma$, para algunas marcaciones $m'$ y $m''$ en $M_1$, y $t_{a_1}$ es habilitada por $m''$. Ahora, si $t_{b_1} \notin c(t_{a_1}, t)$ entonces desde la condición 2´) se sigue que $t$ es habilitada por $m''$ ; en otro caso, como $t_{b_1} \in c(t_{a_1}, t)$ el $O$-camino $c(t_{b_1}, t) = \emptyset$. En $M$, existe $h$ tal que $\mu''$ es alcanzable desde $\mu$ por el disparo de $h$ y $t$ es habilitada por $\mu''$. Así, nosotros podemos reordenar a $h$ de manera que el disparo de $t_{a_1}$ sea seguido por $t_{b_1}$. Por tanto, $h$ es disparable y habilita a $t$ en $M_1$. Esto prueba el primer caso.
Para el segundo caso, supongamos que $c(t_{a_1}, t) = \emptyset$. Desde el no bloqueo de M se sigue que existe $\sigma$ tal que $\mu'$ es alcanzable desde $\mu$ por el disparo de $\sigma$ y $t$ es habilitada por $\mu'$. Ahora, sea $\sigma$ tal que no contenga a $t_{a_1}$, entonces $\sigma$ es disparable en $M_1$ y habilita a $t$.
Supongamos que el teorema es cierto para $k \leq n$. Sea $(l_E, \varphi_{n+1}) = (l_E, \varphi_n \cup (t_a, t_b))$ una $(n+1)$-$EM$ satisfaciendo las condiciones del comportamiento dinámico.
Queremos probar que $t$ es habilitada, $\forall t \in T$, $m \in A(R_{n+1}, m'_o)$.
Hay dos casos:

(1) $m \in A(R_{n+1}, m'_o)$;

(2) $m = (\mu, m(l_E)) \notin A(R_n, m'_o) \Rightarrow (\mu, 1) \in A(R_n, m'_o)$.

Por la hipótesis de inducción, existe $\sigma$ en $M_n$ tal que $t$ es habilitada por la marcación alcanzada desde $m$ por el disparo de $\sigma$, o $t$ es habilitada por la marcación alcanzada desde $(\mu, 1)$ por el disparo de $\sigma$.
En relación a (1), hay tres subcasos:

(1.1) Si $\sigma$ no contiene a $t_a$ ni a $t_b$, así como también ningún camino elemental entre $t_a$ y $t_b$ entonces $\sigma$ es disparable en $M_{n+1}$. Por lo tanto, la marcación alcanzable por el disparo de $\sigma$ en $m$ también habilita a $t$ en $M_{n+1}$.

(1.2) Si $m(l_E) = 1$ y $\sigma$ contiene una o más veces a $t_a$, entonces necesitamos probar que existe $\sigma'$ tal que la marcación alcanzada por el disparo de $\sigma'$ en $m$ habilita a $t$ en $M_{n+1}$.
Como $(l_E,\ \varphi_{n+1})$ es una $(n+1)$-$EM$ satisfaciendo las condiciones del comportamiento dinámico, entonces $\sigma$ puede ser ordenada de una de las dos maneras siguientes, sin cambiar la marcación resultante:
$\sigma_1\, t_a w_1 t_b \sigma_2 t_a w_2 t_b \cdots t_a w_l t_b \sigma_{l+1},\ l \geq 1$ ó
$\sigma_1\, t_a w_1 t_b \sigma_2 t_a w_2 t_b \cdots \sigma_l t_a w_l,\ l \geq 1$, donde $w_i$ y $\sigma_i$ no contiene a $t_a$ ni a $t_b$, y $\sigma_i$ no contiene transiciones en $c(t_a, t_b)$.
Consideremos la primera forma:
$\sigma_1\, t_a w_1 t_b \sigma_2 t_a w_2 t_b \cdots t_a w_l t_b \sigma_{l+1},\ l \geq 1$.
Por la proposición 2, aplicada a la $RP$ marcada $M_n$ conteniendo una $n$-$EM$ satisfaciendo las condiciones del comportamiento dinámico, tenemos que $\sigma_i$ contiene a lo sumo un elemento en $T_a = \{t_{a_i}\ /\ \ 1 \leq i \leq n\ \}$, digamos $t_{a_j}$ , seguido por la transición $t_{b_j}$. Si existe $t_{a_j} h_i t_{b_j}$ en $\sigma_i$ entonces $t_{a_j} h_i t_{b_j}$ puede ser aplicado en $M_{n+1}$, donde $h_i$ no contiene transiciones en $T_a$, $\forall i, 1 \leq i \leq l+1$. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, supongamos que para $1 \leq i \leq l$, $\sigma_i = t_{a_j} h_i$ y $w_i = \gamma_i t_{b_j} e_i$ existe $\varsigma_i = \sigma_i t_a w_i t_b = t_{a_j} h_i t_a \gamma_i t_{b_j} e_i t_b$ en $\sigma$ tal que $\varsigma_i$ no puede disparar en $M_{n+1}$. Probaremos que $\varsigma'_i = t_{a_j} h_i \gamma_i t_{b_j} t_a e_i t_b$ puede disparar en $M_{n+1}$ y que la marcación resultante del disparo es la misma que la producida por el disparo de $\varsigma_i$ en $M_n$.

Afirmación: $\varsigma'_i$ es disparable en $M_n$. (es fácil probar este resultado). Ahora, $\forall l \in L,\ \eta \in A(R_n, m'_o)$, el número de fichas en $l$ en la marcación resultante del disparo de $\varsigma'_i$ en $\eta$ es igual al número de fichas en $l$, en la marcación resultante del disparo de $\varsigma_i$ en $\eta$.

Ahora, como $\varsigma'_i$ y $\varsigma_i$ son disparables y contienen las mismas transiciones, entonces la conclusión es verdadera. Análogamente, el número de fichas en $l$ en las marcaciones resultantes de los disparos de $t_a h_i t_{a_j} \gamma_i t_b e_i t_{b_j}$ y $t_a h_i \gamma_i t_b t_{a_j} e_i t_{b_j}$ en $m$ son iguales. Finalmente, usando la técnica anterior $\sigma$ puede ser transformada en $\sigma'$, la cual puede disparar; así, $t$ es habilitada por $M_{n+1}$.

Consideremos la segunda forma:
$\sigma_1\, t_a w_1 t_b \sigma_2 t_a w_2 t_b \cdots \sigma_l t_a w_l,\ l \geq 1$. Usando la misma técnica anterior, $\sigma'$ puede ser obtenida desde $\sigma$ y así $t$ es habilitada por la marcación alcanzada por el disparo de $\sigma'$ en $m$. Luego, $t$ es habilitada por $M_{n+1}$.

(1.3) Si $m(l_E) = 0$ y $\sigma$ contiene tanto a $t_a$ como a transiciones sobre los caminos entre $t_a$ y $t_b$, una o varias veces; entonces se puede probar análogamente que existe $\sigma'$ tal que la marcación alcanzada por el disparo de $\sigma'$ en $m$ habilita a $t$ en $M_{n+1}$.
En relación a la posibilidad (2), se puede construir una prueba análoga a la prueba de la posibilidad (1). Por lo tanto, $M_{n+1}$ es no bloqueada. ■

**Teorema 3**. $M'$ es reiniciable siempre que $M$ sea reiniciable.

**Demostración:**

Análoga a la del Teorema 2 y es también realizada por inducción sobre $k$. Para toda $m \in\ A(R_{n+1}, m'_o)$, queremos probar que existe $\sigma$ en $M_{n+1}$ tal que $m'_o$ es alcanzable desde $m$ por el disparo de $\sigma$. Como $m \in A(R_n, m'_o)$ o $(\mu, l) \in\ A(R_n, m'_o)$, entonces existe $\sigma$ en $M_n$ tal que $m'_o$ es alcanzable desde $m$ por el disparo de $\sigma$ o $m'_o$ es alcanzable desde $(\mu, 1)$ por el disparo de $\sigma$. ■

## 5 Exclusión mutual generalizada

La exclusión mutual es usada para dar solución a problemas de síntesis donde el recurso compartido se ocupa de operaciones sin elección; sin embargo, este concepto puede ser extendido a un caso más general donde sean establecidas operaciones con elección.

**Definición 2**: Dada una $RP$ marcada $M' = (R', m_0)$, $R' = (L',\ T', E', S')$, $L' = L_o \cup L_f \cup L_v$. Una $k$-exclusión mutual generalizada para $M'$ es un par $(l_E, \varphi)$ tal que:

1. $l_E \in L_f$ con $m_0(l_E) = 1$, $\varphi$ es un conjunto de pares de transiciones; es decir,
   $\varphi = \{(T_{a_1}, T_{b_1}), (T_{a_2}, T_{b_2}), \cdots, (T_{a_k}, T_{b_k}) : k \geq 1\}$,
   satisfaciendo las condiciones siguientes:

   1.1 $T_{a_i}, T_{b_i} \subset T$, $T_{a_i} \cap T_{b_j} = \emptyset$, $T_{a_i} \cap T_{a_j} = \emptyset$, y $T_{b_i} \cap T_{b_j} = \emptyset$, siempre que $i \neq j$, $\forall i, j,\ 1 \leq i, j \leq k$;

   1.2 $E(l_E, t) = S(l_E, t') = 1$, $E(l_E, t') = S(l_E, t) = 0$ cuando $\forall t \in T_a$, $t' \in T_b$, y $E(l_E,\ t_u) = S(l_E,\ t_u) =$

0 cuando $t_u \notin T_a \cup T_b$, donde $T_a = T_{a_1} \cup T_{a_2} \cup \cdots \cup T_{a_k}$ y $T_b = T_{b_1} \cup T_{b_2} \cup \cdots \cup T_{b_k}$;

1.3 $\forall t \in T_{a_i}$ y $t' \in T_{b_i}$, $c(t, t') \neq \emptyset$;

1.4 $\forall t \in T_{a_i}$, $l \in L_v$, si $l \in c(t)$, entonces $\exists t' \in T_{b_i}$, $t' \in c(t)$;

1.5 $\forall t \in T_{a_i}$, si $c(t) \cap (L_f \cup L_v) = l_E$, entonces $\exists t' \in T_{b_i}, t' \in c(t)$;

1.6 Si $t'' \in c(t, t')$, entonces $t''$ está sobre un $O$-camino $c(t_{a_i})$, donde $t \in T_{a_i}$, $t' \in T_b$, $1 \leq i \leq k$;.

2. $L_f \cup L_v$ satisface las condiciones $CL$ y $S$ y no existen $O$-caminos entre $t$ y $t'$, $\forall t \in T_b$ y $t' \in T_a$;

3. $\exists m_0$, para un grupo de transiciones $\{\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}, \cdots, \gamma_{a_k}\}$ donde $\gamma_{a_i} \in T_{a_i}$, $\exists$ $g$ que no contiene ninguna transición en $T_a \setminus \{\gamma_{a_i}: i \in N_k\}$ tal que la marcación resultante del disparo de $g$ en $m_0$ habilita a $\gamma_{a_i}$, $1 \leq i \leq k$;

4. $\forall m_0, si\ \gamma \in T_{a_j}$ dispara en $m \in A(R, m_o)$, entonces $\forall t$, si $c(\gamma, t) \neq \emptyset$ y $T_{b_j} \cap c(\gamma, t) = \emptyset$, $t$ puede ser habilitada y para toda $g_j$ disparable que no contiene transiciones en $T_{b_j}$, $\exists h_j$ y $\gamma' \in T_{b_j}$tal que la marcación alcanzada por el disparo de $\gamma g_j h_j$ permite $\gamma'$ ; más aún, si $m(l_E) = 1$ y $t_u$ es permitida entonces $t_u \notin T_b$.

Desde la extensión, es claro que si $|T_{a_j}| = |T_{b_j}| = 1$, $\forall j, 1 \leq j \leq k$, entonces una $k$-exclusión mutual generalizada para $M'$ es una $k$-exclusión mutual para $M'$. Por su parte, usando las mismas técnicas que en las demostraciones de los teoremas 1, 2 y 3 podemos probar sin mayor dificultad el teorema y corolario siguientes. De hecho, ellos generalizan a los teoremas 1, 2 y 3, para una red de Petri conteniendo un $k$-exclusión mutual generalizada. Más precisamente,

**Teorema 4:** Sea $M = ((L_o \cup L_f \cup L_v, T, E, S), m_0)$ una subred de $M' = ((L_o \cup (L_f \cup \{l_E\}) \cup L_v, T', E', S'), m'_0)$, $T' = T$ y $\varphi = \{(T_{a_i}, T_{b_i}): 1 \leq i \leq k\}$. Si $(l_E, \varphi)$ es una $k$-exclusión mutual generalizada, entonces:

i) $M'$ es acotada (respectivamente segura) siempre que $M$ sea acotada (respectivamente segura);

ii) $M'$ es no bloqueada siempre que $M$ sea no bloqueada;

iii) $M'$ es reiniciable siempre que $M$ sea reiniciable.

En la k-exclusión mutual establecemos que hay un recurso no compartido si $k = 1$; mientras que en la $k$-exclusión mutual generalizada, un recurso no compartido se establece con $k = 1$ y $|T_{a_i}| = |T_{b_i}|$=1. Esto define la estructura siguiente: $t, t' \in T$, un $O$-camino $c(t, t')$, $l \in L$, y $m_0(l) = 1$, tal que $E(l, t) = 1$, $S(l, t') = 1$. Así, obtenemos como un caso especial el corolario siguiente.

**Corolario 1** Sea $M' = ((L', T', E', S'), m'_0)$ una $RP$ marcada, y sea $M = ((L_o \cup L_f \cup L_v, T \cup \{t_a, t_b\}, E, S), m_0)$ una subred de $M'$, con $L' = L_o \cup (L_f \cup \{l_E\}) \cup L_v$, $T' = T \cup \{t_a, t_b\}$. Si $(l_E, (t_a, t_b))$ es una 1-exclusión mutual generalizada, entonces:

i) $M'$ es acotada (respectivamente segura) siempre que $M$ sea acotada (respectivamente segura);

ii) $M'$ es no bloqueada siempre que $M$ sea no bloqueada;

iii) $M'$ es reiniciable siempre que $M$ sea reiniciable.

## 6 Conclusión

Nosotros consideramos un diseño metodológico para el análisis en sistemas de manufactura, con lo cual nos direccionamos a desarrollar una estructura formal para sintetizar una red de Petri que lleve a cabo un conjunto de requerimientos y preserve algunas propiedades cualitativas deseables.

## Referencias

Li Z, Wu N, Zhou M, 2012, Deadlock Control of automated manufacturing Systems based on petri nets. A literature review. Systems, man, and cybernetics, Part C: Applications and Review, IEEE Transactions on, 42(4), ISSN: 1094-6977, 437-462.

Mata G, Méndez, A, Cardillo J, Chacón E, 2016, Analysis of manufacturing system containing a mutual exclusión in the contex of Petri net theory, Revista Ingeniería UC, Vol.23, No.1, 30-40, Abril..

Murata T, 1989, Petri Nets properties, analysis and applications, Proceedings of the IEEE, Vol. 77, No. 4.

Peterson J, 1981, Petri net theory and the modeling of systems, Prentice Hall, PTR Upper Saddle River, NJ, USA.

Zhou B, 2016, Lean principles, practices, and impacts: a Study on Small and medium-sized entermprises (SMEs), Annals of Operations Research, 241(1-2), 457-474.
Zhou M, Dicesare FA, 1990, Petri net design method for automated manufacturing Systems with shared resources, Proc. Of IEEE int. conf. on Roboties and automation.

***Recibido:*** *23 de octubre de 2021*

***Aceptado:*** *15 de febrero de 2022*

***Coello Vera, Adalberto Antonio:*** *Ing. Administración de empresas agropecuarias. Instituto de posgrado. Universidad Técnica de Manabí.*

***https://orcid.org/0000-0001-5985-3532***

***Solé Aguilera, Luz Estela:*** *Licenciada en Matemáticas, Magister en Matemáticas, doctor en Matemáticas, Profesor Titular jubilada activa. Facultad de Ciencias (ULA). Departamento de Matemáticas. Lea de investigación: sistemas dinámicos de eventos discretos. Correo electrónico: luzsole@gmail.com*

***https://orcid.org/0000-0001-6783-1819***