Artículo de Investigación. Revista Ciencia e Ingeniería. Vol. 46, No. 1 pp. 1-12, diciembre-marzo, 2025.
ISSN 1316-7081. ISSN Elect. 2244-8780 Universidad de los Andes (ULA)

Álgebra de la dinámica de una clase de sistemas discretos

Algebra of the dynamics of a class of discrete systems

Mantilla-Morales, Gisella[1]*; Ruiz-Leal, Bladismir[2]; Mata-Díaz, Guelvis[3]
[1]Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE, Ecuador
[2]Universidad Yachay Tech, Ecuador
[3]Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.
*gbmantilla@espe.edu.ec

Resumen

Esta investigación trata el problema de extensión de la teoría de autómatas finitos convencionales, para el estudio de su dinámica. Para ello se plantea un enfoque algebraico centrado en los conceptos de semianillos, K-subconjuntos racionales, K-+-álgebras y K-Σ-autómatas. Se demuestra en este contexto el Teorema de Kleene como argumento fundamental para obtener que la dinámica de un K-Σ-autómata es la solución de un sistema de ecuaciones lineales de lenguajes.

Palabras clave: álgebra, sistemas, autómatas, lenguajes, ecuaciones.

Abstract

This research addresses the problem of extending the theory of conventional finite automata to study their dynamics. To do so, an algebraic approach is proposed, centered on the concepts of semirings, K-rational subsets, K-+-algebras and K-Σ-automata. In this context, Kleene's Theorem is demonstrated as a fundamental argument to obtain that the dynamics of a K-Σ-automaton is the solution of a system of linear equations of languages.

Keywords: algebra, systems, automata, languages, equations.

1 Introducción

En la teoría de sistemas es conocida una clase llamada Sistemas de Eventos Discretos (SED) (ver Branicky 1995). Esta incluye a los Sistemas de Manufactura, Sistemas Químicos, Económicos, Legales, de Tráfico Aéreo, telecomunicaciones; en fin, a todo sistema cuyos estados cambian a tiempo discreto por la ocurrencia de acciones o eventos (ver Caspi 1991).

En muchos casos los SED son representados utilizando Teoría de Autómatas, sobre todo cuando los aspectos a ser estudiados son estructurales: aspectos directamente relacionados con la lógica de evolución de estos sistemas.

En este manuscrito se presentan los Autómatas mediante un enfoque algebraico tal como es expuesto en (Eilemberg 1974), donde los argumentos y demostraciones son constructivas; de esta manera se rompe con la forma convencional impuesta en la literatura actual sobre Autómatas.

Es de suma importancia mencionar que las nociones básicas sobre las cuales se construye la teoría de Autómatas son las de acciones: eventos; y estados: condiciones lógicas del sistema en el tiempo. Aunque estas nociones parecen tener algo que ver con el tiempo, son independientes estructuralmente hablando (ver Mata 2017). En efecto, siempre se está interesado, en la representación de un SED, solamente en los órdenes posibles en que pueden ocurrir las acciones del sistema (ver Mata y col., 2018). Esta situación conduce razonablemente a describir verbalmente un SED como el conjunto de todas las trayectorias de un grafo dirigido. Por lo tanto, si Σ y Q son dos conjuntos representando a las acciones y a los estados respectivamente, y $\mathbf{E}$ es un subconjunto apropiado de $Q\times\Sigma\times Q$, que representa los cambios de estados por la ocurrencia de acciones, entonces un SED es modelado por un quíntuple $\mathbf{A}=(Q,\Sigma,\mathbf{E},\mathbf{I},T)$, donde $\mathbf{I}$ y T son subconjuntos de Q que representan los estados en los que comienza el sistema y los objetivos respectivamente. Finalmente, $\mathbf{A}$ es un autómata.

Ahora, desde la práctica, se consideran a los autómatas cuyos conjuntos de acciones y de estados son finitos. Así, las trayectorias de un SED pueden ser vistas como sucesiones finitas de la forma $(q_0,\alpha_1,q_1),(q_1,\alpha_2,q_2),\ldots,(q_{n-1},\alpha_n,q_n)$, donde cada uno de estos triples son elementos de E. Más precisamente, el interés está centrado en las trayectorias tales que $q_0\in\mathbf{I}$ y $q_n\in T$. Este conjunto de trayectorias determina un conjunto de etiquetas de la forma $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, las cuales constituyen el llamado comportamiento del autómata A (o dinámica del sistema), que es denotado por $|A|$.

Ahora, en este trabajo se estudia un formalismo matemático para generar un método eficiente de descripción del comportamiento $|A|$, pero con algunas variaciones importantes sobre las construcciones de las demostraciones. Este método consiste en determinar la solución única, bajo ciertas condiciones, de un sistema de ecuaciones lineales de lenguajes. El punto crucial es que esta solución coincide con $|A|\in \mathrm{Rat}_K\Sigma^*$, donde $\mathrm{Rat}_K\Sigma^*$ es una K-álgebra, con K un semianillo y Σ^* un monoide libre con base Σ.

2 Preliminares

El propósito fundamental de este trabajo es incluir las nociones más relevantes de la teoría de autómatas: lenguajes regulares, operaciones con autómatas, entre otras; las cuales permiten fijar la terminología y notaciones que posteriormente conducen a un problema de extensión.

Sea Σ un conjunto, el monoide libre Σ^* con base Σ es definido como sigue: los elementos de Σ^* son n-uplas $s=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $n>0$, de elementos de Σ. El entero n es llamado la longitud de s, el cual es denotado por $|s|$. Si $w=(w_1,w_2,\cdots,w_m)$ es otro elemento de Σ^*, entonces el producto es definido por concatenación; es decir, $sw=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,w_1,w_2,\cdots,w_m)$. Luego, se obtiene el monoide Σ^* con unidad $\theta=(\ )$, la 0-upla. Claramente, $|sw|=|s|+|w|$ y $|\theta|=0$. Ahora, poniendo $\alpha=(\alpha)$, $\alpha\in\Sigma$, se puede escribir $s=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$, si $n>1$.

Todo subconjunto L de Σ^* es llamado un lenguaje sobre Σ. Por otra parte, $s\in\Sigma^*$ es llamado un prefijo de $w\in\Sigma^*$, denotado $s\preceq w$, si existe una palabra $\sigma\in\Sigma^*$ tal que $w=s\sigma$. Sea $L\subset\Sigma^*$ un lenguaje sobre Σ, el subconjunto de todos los prefijos de palabras de L es llamado la clausura de L, denotado $\bar{L}$; es decir, $\bar{L}=\{s\in\Sigma^*/\exists w\in\Sigma^*, sw\in L\}$. Finalmente, L es cerrado si $L=\bar{L}$.

Por su parte, la teoría de autómatas es un enfoque que contiene una estructura de transición de estados, la cual permite direccionar el análisis y síntesis haciendo uso del mecanismo de transición. Formalmente, sea Σ un alfabeto finito. Un Autómata Finito $\mathbf{A}$ (AF) sobre Σ (o un Σ-autómata determinístico) es un quíntuple (Q,Σ,E,I,T), donde Q es un conjunto finito cuyos elementos son llamados estados, I y T son subconjuntos de Q llamados conjuntos de estados iniciales y finales respectivamente, y E es un subconjunto de $Q\times\Sigma\times Q$, cuyos elementos son llamados eventos. Adicionalmente, si $\mathbf{A}$ tiene a lo sumo un estado inicial, y para todo $q\in Q$ y $\alpha\in\Sigma$, existe a lo sumo un evento $(q,\alpha,p)\in E$, entonces $\mathbf{A}$ es llamado determinístico.

Un evento (q,σ,p) es denotado $q\overset{\sigma}{\rightarrow}p$, y se dice que este comienza en q y finaliza en p con etiqueta σ.

Un camino (o trayectoria) c en A es una sucesión finita $c=(q_0,\alpha_1,q_1)(q_1,\alpha_2,q_2)\cdots(q_{k-1},\alpha_k,q_k)$ de arcos consecutivos, donde q_0 y q_k son llamados comienzo y final del camino c respectivamente, y el entero $k\geq 1$ es llamado la longitud del camino.

En el trabajo se usan las siguientes notaciones para un camino c, $q_0\overset{\sigma_1}{\rightarrow}q_1\rightarrow\cdots\overset{\sigma k}{\rightarrow}q_k$, $q_0\overset{c}{\rightarrow}q_k$ o $c\colon q_0\rightarrow q_k$. El elemento $s=\alpha_1\alpha_2...\alpha_k\in\Sigma^*$ es llamado la etiqueta de c y es denotado por $|c|$. La longitud de s es denotada por $|s|$ y la del camino por $\|c\|$. Así, se tiene que $|s|=\|c\|=k$.

Para cada estado q se incluye el camino nulo (camino trivial) 1_q, el cual comienza y finaliza en q. Por definición, el camino nulo tiene etiqueta θ y longitud 0; es decir, $|1_q|=0$ y $\|1_q\|=0$. Además, dados dos caminos $c\colon p\rightarrow q$ y $c'\colon q\rightarrow r$, el camino $cc'\colon p\rightarrow r$ (composición de caminos) es definido por la concatenación. luego, $|cc'|=|c||c'|$ y $\|cc'\|=\|c\|+\|c'\|$.

Sea $c\colon i\rightarrow t$ un camino en A, se dice que c es un camino exitoso si $i\in I$ y $t\in T$. La etiqueta de este camino es llamada etiqueta exitosa. El conjunto de todas las etiquetas exitosas en A es llamado comportamiento o la dinámica de A, y se denota por $|A|$; es decir, $|A|=\{s\in\Sigma^*/\exists c\colon i\rightarrow t$ en A, con $i\in I, t\in T, |c|=s\}$.

Un lenguaje B de Σ^* es llamado regular si existe un Σ-autómata A tal que $B=|A|$.

En lo que sigue se escribe $\alpha^*=\{\alpha\}^*$, para todo $\alpha\in\Sigma$, con la finalidad de simplificar la escritura. También, se tratan a $\alpha\in\Sigma$ y $s\in\Sigma^*$ como conjuntos unitarios.

Seguidamente, se estudian algunas operaciones básicas de autómatas y se analizan sus comportamientos. Sean dos AF $A=(Q_A,\Sigma,E_A,I_A,T_A)$ y $B=(Q_B,\Sigma,E_B,I_B,T_B)$, donde $Q_A\cap Q_B=\emptyset$. El Σ-autómata unión es dado por $C=A\cup B=(Q_C,\Sigma,E_C,I_C,T_C)$, donde $Q_C=Q_A\cup Q_B$, $I_C=I_A\cup I_B$, $T_C=T_A\cup T_B$. Además, un evento está en E_C, si y solo si, está en E_A o está en E_B. Por lo tanto, un camino está en C, si y solo si, está en A o está en B.

El Σ-autómata producto (o intersección) de A y B es dado por $C=A\times B=(Q_C,\Sigma,E_C,I_c,T_C)$, donde $Q_C=Q_A\times Q_B$, $I_C=I_A\times I_B$, $T_C=T_A\times T_B$. En consecuencia, un evento $(p',p'')\overset{\alpha}{\rightarrow}(q',q'')$ está en E_C, si y solo si, $p'\overset{\alpha}{\rightarrow}q'$ es un evento en E_A y $p''\overset{\alpha}{\rightarrow}q''$ es un evento en E_B.

Por otra parte, se llama autómata inverso de $\mathbf{A}$ al Σ-autómata dado por $\mathbf{A}^{\varphi}=(Q,\Sigma,E^{\varphi},I,T)$, donde E^{φ} es el subconjunto cuyos elementos son los eventos inversos de $\mathbf{E}$; es decir, si $p\overset{\alpha}{\rightarrow}q$ es un evento en E, entonces $q\overset{\alpha}{\rightarrow}p$ es un evento en $\mathbf{E}^{\varphi}$.

Note que, si c es un camino en $\mathbf{A}$ con etiqueta $|c|=\alpha_1\ldots\alpha_k$, entonces c^φ es un camino en $\mathbf{A}^\varphi$ con etiqueta $|c^\varphi|=\varphi(\alpha_1\ldots\alpha_k)=\alpha_k\ldots\alpha_1$, donde $\varphi:\Sigma^*\to\Sigma^*$ es la función inversa definida por $\varphi(\theta)=\theta$, $\varphi(\alpha)=\alpha$, $\varphi(st)=\varphi(t)\varphi(s)=ts$.

Se puede demostrar que la clase de los subconjuntos regulares es cerrada bajo unión, intersección e inverso.

Ahora, se dan algunas construcciones sobre autómatas, relacionándolas mediante un homomorfismo de monoides $f:\Gamma^*\to\Sigma^*$, donde Γ y Σ son dos alfabetos. También, se asume que f es un homomorfismo fino: $f(\alpha)\in\Sigma\cup\theta$, $\forall\alpha\in\Gamma$. Las identidades θ_1 y θ_2 de Γ^* y Σ^* respectivamente son referidas como θ.

En efecto, sea $f:\Gamma^*\to\Sigma^*$ un homomorfismo fino. Se llama imagen inversa de $\mathbf{A}$ al Γ-autómata $f^{-1}(\mathbf{A})$, donde Q, I, T no son alterados, y los eventos son dados por $p\xrightarrow{\gamma}q$, si $f(\gamma)=\alpha$ y $p\xrightarrow{\alpha}q$ es un evento en $\mathbf{A}$, y $q\xrightarrow{\gamma}p$, sí $f(\gamma)=\theta$.

Un camino $c'\colon p\to q$ en $f^{-1}(\mathbf{A})$ puede ser visto como un par (c, g), donde $c\colon p\to q$ es un camino en $\mathbf{A}$ y $g\in\Gamma^*$ es tal que $|c'|=g$ y $f(g)=|c|$; de donde, se puede demostrar que si $f:\Gamma^*\to\Sigma^*$ es un homomorfismo fino y $A\subset\Sigma^*$ es regular, entonces $f^{-1}(A)\subset\Gamma^*$ es regular.

Finalmente, sea $f:\Gamma^*\to\Sigma^*$ un homomorfismo tal que $f(\gamma)\neq\theta$, para todo $\gamma\in\Gamma$ (o equivalentemente que $f^{-1}(\theta)=\theta$ o aún equivalentemente que $|g|\leqslant|f(g)|$, para todo $g\in\Gamma^*$). Sea $\mathbf{A}=(Q,\Gamma,E,\mathbf{I},T)$ un Γ-autómata. Se llama imagen directa de $\mathbf{A}$ al Σ-autómata $f(\mathbf{A})=(Q',\Sigma,E',\mathbf{I},T)$ donde $Q'\supset Q$ y los eventos son determinados como sigue: sea $\mathbf{p}\xrightarrow{\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{q}$ un evento en $\mathbf{A}$ y $f(\gamma)=\alpha_1\cdots\alpha_n$, $n\geqslant1$; si $n=1$, entonces el arco $\mathbf{p}\xrightarrow{\boldsymbol{\alpha_1}}\mathbf{q}$ está en $f(\mathbf{A})$; si $n>1$, entonces los arcos $\mathbf{p}\xrightarrow{\boldsymbol{\alpha_1}}\mathbf{q_1}\xrightarrow{\boldsymbol{\alpha_2}}\mathbf{q_2}\to\cdots\to\mathbf{q_{n-1}}\xrightarrow{\boldsymbol{\alpha_n}}\mathbf{q}$ están en $f(\mathbf{A})$, donde los $n-1$ estados intermedios son nuevos estados distintos agregados a Q'. Repitiendo esto, para todo arco en $\mathbf{A}$, se obtiene $f(\mathbf{A})$.

Como antes, si $f:\Gamma^*\to\Sigma^*$ es un homomorfismo tal que $f^{-1}(\theta)=\theta$, y $A\subset\Gamma^*$ es regular, entonces $f(A)\subset\Sigma^*$ es regular.

3 K- Σ-Autómatas

Como apoyo metodológico para formalizar la técnica que describe la dinámica de un AF, se incluye el concepto de multiplicidad. Este permite una extensión fundamentada en objetos matemáticos (conjuntos, funciones, relaciones, entre otros) en el campo de los sistemas de ecuaciones lineales de lenguajes. Para precisar un poco más, considere un AF $\mathbf{A}=(Q,\Sigma,E,I,T)$ con dinámica $|\mathbf{A}|$. Si $c:i\to t$, $i\in I$, $t\in T$, $|c|=s$ está en $\mathbf{A}$ y n determina la cantidad de estos caminos, entonces se puede definir una aplicación $\mu:\Sigma^*\to\mathbb{N}$ que especifica la multiplicidad de los elementos de Σ^*. Se hace referencia a esto para $s\in\Sigma^*$, con multiplicidad n. Con abuso de lenguaje se escribe $\mu=|\mathbf{A}|$ y $|\mathbf{A}|(s)=n$; de donde, $|\mathbf{A}|(s)=0$ expresa que $s\notin|\mathbf{A}|$. Finalmente, se identifica en lo que sigue a Σ^* con $|\mathbf{A}|:\Sigma^*\to\mathbb{N}$. Se enfatiza también que cualquier subconjunto A de Σ^* es equivalente a una función $A:\Sigma^*\to\beta$, con $\beta=\{0,1\}$, en el sentido que $s\in A\Leftrightarrow A(s)=1$.

Se incluye una estructura fundamental para el desarrollo de este artículo. De hecho, la noción de semianillo es una estructura débil del concepto convencional de anillos que promueve la estructura de K-+-álgebras.

Definición 1. Un semianillo K es un subconjunto dotado de dos operaciones: suma (+) y multiplicación (.); tal que (K,+) es un monoide conmutativo con elemento neutro 0 y (K, .) es un monoide con elemento identidad 1. Además, para todo $x,y,z\in K$ se tiene que $x(y+z)=xy+xz$; $(y+z)x=yx+zx$; $x0=0=0x$. Un semianillo K es llamado conmutativo si (K, .) es conmutativo. Claramente, todo anillo con unidad es un semianillo.

Considere $\{x_i\}_{i\in I}$ una colección arbitraria de elementos de un semianillo K, con I es un conjunto de indices dado.

Si se asume la finitud de I, $\sum_{i\in I}x_i\in K$ **(1)**

Las propiedades siguientes con respecto a la suma son verdaderas: $I=\{i\}\Rightarrow\sum_{i\in I}x_i=x_i$ **(2)**

Sea $I=\bigcup_{j\in J}I_j$ una partición de $\mathbf{I}$, $z\in K\Rightarrow\sum_{i\in I}x_i=\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j}x_i\right)$; $z\left(\sum_{i\in I}x_i\right)=\sum_{i\in I}zx_i$; $\left(\sum_{i\in I}x_i\right)z=\sum_{i\in I}x_iz$; $I=\emptyset\Rightarrow\sum_{i\in I}x_i=0$. **(3)**

Al considerar **(1)** como la suma x+y y tomar **(2), (3)**, (K,.), como axiomas, se define $x_1+x_2:=\sum_{i\in I}x_i$ con $I=\{1,2\}$; y $0:=\sum_{i\in I}x_i$ sí $I=\emptyset$.

Si $\mathbf{I}$ es finito, entonces claramente **(1)** está bien definida. Por su parte, si $\mathbf{I}$ es un conjunto de índices arbitrario, entonces **(1)** debe estar bien definida, y es un elemento de K. Así, se tiene el concepto de semianillo completo bajo la nueva definición. En consecuencia, todo semianillo completo es un semianillo.

Definición 2. Dados dos semianillos K y K′, un homomorfismo $\varphi:K\to K'$ es cualquier función tal que $\varphi(x_1+x_2)=\varphi(x_1)+\varphi(x_2)$, $\varphi(0)=0'$; y $\varphi(x_1.x_2)=\varphi(x_1)\varphi(x_2)$, $\varphi(1)=1'$.

Definición 3. Un semianillo K es llamado positivo si satisface: $0\neq1$; si $x+y=0$, entonces $x=y=0$; si $xy=0$, entonces $x=0$ o $y=0$.

Los K-subconjutos, con K un semianillo, son objetos que permiten identificar funciones con sus dominios, y ello constituye un enfoque técnico para el manejo notacional y construcción de pruebas. En lo que sigue se asume que K es un semianillo no trivial ($0 \neq 1$) y conmutativo.

Definición 4. Sea X un conjunto. Un K-subconjunto A de X es una función A:X→K. Para cada x∈X, el elemento A(x) es llamado la multiplicidad con la cual x pertenece a A. Si los valores que toma A son 0 y 1, se dice que el K-subconjunto A de X es no ambiguo.

Ejemplo 1. Los subconjuntos $\mathbf{X}, \emptyset$ y $\boldsymbol{x}$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, definidos por $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{1}$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$; $\emptyset(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$; $\mathbf{x}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \mathbf{si\ x = y} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{en\ otro\ caso} \end{cases}$, respectivamente, son no ambiguos.

Los subconjuntos no ambiguos de x, dados en el **Ejemplo 1** son referidos como simples. Si A es un subconjunto no ambiguo de X, entonces x∈A y $A(x) = 1$ indican lo mismo.

Se define la operación suma o unión como sigue: para cada familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de K-subconjuntos de X, con I una familia arbitraria de índices $\left(\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \mathbf{A_j}\right)(\mathbf{x}) = \left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \mathbf{A_i}\right)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \mathbf{A_i}(\mathbf{x})$. **(4)**

Ahora, considere la operación producto (o multiplicación) de $k \in K$ por un K-subconjunto A tal como sigue $(kA)(x) = kA(x)$ **(5)**

es decir, el resultado es un **K**-subconjunto **kA**.

Se tienen las siguientes propiedades: $\mathbf{1A} = \mathbf{A}, \mathbf{0A} = \emptyset, (\mathbf{k1k2})\mathbf{A} = \mathbf{k1}(\mathbf{k2A}), \left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \mathbf{k_i}\right)\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \mathbf{k_i A}$; y además, $\mathbf{k}\left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \mathbf{A_i}\right) = \sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \mathbf{k_i A}$.

Se define la intersección $A \cap B$ de dos K-subconjuntos como $(A \cap B)(x) = A(x)B(x)$.

La suma $\sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ es llamada la expansión de A. Esta expresión es útil para manipular K-subconjuntos.

Ejemplo 2. $\mathbf{kA} = \sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \mathbf{kA}(\mathbf{x})\mathbf{x}$; y además, $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{x}$.

Se incluye el estudio de la multiplicación o producto de K-subconjuntos de S, siendo (S, ·) un semigrupo. En verdad, se incluye una categoría de objetos con las operaciones de suma y multiplicación antes mencionadas para formalizar las nociones y estructuras matriciales, vía ecuaciones lineales de lenguajes.

Definición 5. Sean (S, ·) un semigrupo, A y B K-subconjuntos de S, donde K es un semianillo completo. El K-subconjunto producto AB es dado por $(\mathbf{AB})(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{xy=z}} \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{y})$.

Es claro que la operación AB es asociativa. Por lo tanto, K^M es un semianillo con identidad θ, siempre que M sea un monoide, donde θ es la identidad de M.

Considere P,Q dos conjuntos finitos. Un K-subconjunto de $P \times Q$ es cualquier matriz cuyas filas y columnas son indizadas usando los elementos de P y Q respectivamente, y cuyas entradas están en K. Luego, $A \in K^{P\times Q}$ se escribe A_{pq} en lugar de A(p,q); así, la matriz se escribe $A = [A_{pq}]$.

La operación de suma de matrices es establecida por la suma de K-subconjuntos. Es decir, $(A+B)_{pq} = A_{pq} + B_{pq}$, siempre que $B \in K^{P\times Q}$.

La operación de multiplicación de matrices es dada como sigue: sean $A \in K^{P\times Q}$ y $B \in K^{Q\times R}$, entonces $(\mathbf{AB})_{\mathbf{pr}} = \sum_{\mathbf{q}\in\mathbf{Q}} \mathbf{A_{pq}B_{qr}}$.

Algunas propiedades de la multiplicación: si P=Q, entonces $K^{P\times P}$ es un semianillo con unidad 1_p, donde $(\mathbf{1_p})_{\mathbf{q}'} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \mathbf{si\ q = q'} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{si\ q \neq q'} \end{cases}$, A es llamado vector fila, siempre que $A \in K^{P\times Q}$ y P sea unitario. También, A es llamado vector columna, siempre que Q sea unitario.

Definición 6. Sea Σ un alfabeto finito y K un semianillo conmutativo. Un K-Σ-autómata **A** (o un K-Σ-autómata determinístico) es un quintuple, **A**=(Q,Σ,E,I,T) donde Q es un conjunto finito, I y T son K-subconjuntos de Q y E es K-subconjunto de Q×Σ×Q.

Dado **A**=(Q,Σ,E,I,T) un K-Σ-autómata, si $E(p,\alpha,q)=k \neq 0$, entonces se dice que hay un arco de p a q denotado $\mathbf{p} \xrightarrow{\mathbf{k\alpha}} \mathbf{q}$, con etiqueta kα. También, se dice que $\mathbf{p} \xrightarrow{\mathbf{k\alpha}} \mathbf{q}$ está en **A**.

Así, de manera análoga a los Σ-autómatas, se pueden considerar los caminos $\mathbf{c}: \mathbf{p} \to \mathbf{q}$. Luego, si c es un camino $\mathbf{p} \xrightarrow{\mathbf{k_1\alpha_1}} \mathbf{q_1} \xrightarrow{\mathbf{k_2\alpha_2}} \cdots \mathbf{q_{n-1}} \xrightarrow{\mathbf{k_n\alpha_n}} \mathbf{q}$, entonces $|c|=ks$ es su etiqueta, con $k=k_1 \cdot\ \cdot k_n$ y $s=\alpha_1\cdots\alpha_n$, y longitud $\|c\|=n=|s|$.

Definición 7. Sea **A**=(Q,Σ,E,I,T) un K-Σ-autómata. El comportamiento o dinámica de **A** es un K-subconjunto de Σ^*, denotado $|\mathbf{A}|$, es dado por $|\mathbf{A}| = \sum_{\mathbf{p,q}\in\mathbf{Q}} \sum_{\mathbf{c}} \mathbf{I}(\mathbf{p})\,|\mathbf{c}|\,\mathbf{T}(\mathbf{q})$, con c variando sobre todos los caminos $\mathbf{c}: \mathbf{p} \to \mathbf{q}$; es decir, $|\mathbf{A}|(\mathbf{s}) =$

$\sum_{\mathbf{p,q\in Q}} \sum_{\mathbf{k\in c}} \mathbf{I(p)\,kT(q)}$, donde $\mathbf{C} = \{k\in K\colon \exists\ c{:}p\to q, |c| = ks\}$.

Note que el K-subconjunto E de Q×Σ×Q puede ser visto como una función E:Q×Σ×Q→K. En lo que sigue se escribe $E(p,\alpha,q) = E_{pq}(\alpha)$. Luego, para todo $p,q\in Q$, se tiene que E_{pq} es un K-subconjuntos de Σ. Luego, E se puede identificar con una matriz $E\colon Q\times Q\to K^{\Sigma}$ llamada matriz de transición.

Todo K-subconjunto de Σ puede extenderse a un K-subconjunto de Σ^* como sigue: para $p, q \in Q$, $E_{pq}\colon \Sigma^*\to K$, $\mathbf{E_{pq}(s)} = \begin{cases} \mathbf{E_{pq}(s)}, & \mathbf{si\ s\in\Sigma} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{si\ s\notin\Sigma} \end{cases}$. Así, E puede ser visto como un K^{Σ^*}-subconjunto de $Q\times Q$; esto es, una matriz $Q\times Q$ con entradas en K^{Σ^*}. En consecuencia, ya que K^{Σ^*} es un semianillo, se utilizan las correspondientes operaciones.

Ahora bien, para cada $n\in\mathbb{N}$, se consideran las matrices $E^n\colon Q\times Q\to K^{\Sigma^*}$ por $E^0=1_Q$, $E^1=E$ y $E^n=EE^{n-1}$, $n\geq 2$, con $E^n{}_{pr} = \sum_{r\in Q} E_{pr}E^{n-1}{}_{rq}$, donde $p, q\in Q$. Es claro que si $s\in\Sigma^*$ y $|s|\neq n$, se tiene que $E^n{}_{pq}(s) = 0$, con $p,q\in Q$; con lo cual, $\{E^n{}_{pq}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es localmente finita. Luego, se puede definir $E^*{}_{pq} = \sum_{n=0}^{\infty} E^n{}_{pq}$, y por lo tanto, resulta la matriz $E^*\colon Q\times Q\to K^{\Sigma^*}$, $E^*=1_Q+E+E^2+\cdots+E^n+\cdots$ llamada matriz de transición extendida.

Para cada $s\in\Sigma^*$, sea $E^*(s)=E^*_{pq}(s)\in\mathbf{K}^{Q\times Q}$.

Si $s=\alpha_1\cdots\alpha_n$, se sigue que $E^*(s)=E^n(s)=E(\alpha_1)\cdots E(\alpha_n)=E^*(\alpha_1)\cdots E^*(\alpha_n)$.

Teorema 1. Para cualesquiera $p,q\in Q$, el $\mathbf{K}$-subconjunto $\boldsymbol{E^*_{pq}}$ es la suma de todas las etiquetas de $\mathbf{c\colon p\to q}$ en $\mathbf{A}$.

Demostración: Sean $p, q\in Q$, como $\mathbf{E^*{}_{pq}} = \sum_{\mathbf{pq=1}}^{\infty}\mathbf{E^n{}_{pq}}$, es suficiente demostrar que $\mathbf{E^n{}_{pq}}$ es la suma de todas las etiquetas de caminos de longitud n. Si n = 0, entonces $\mathbf{E^0{}_{pq}} = \begin{cases}\boldsymbol{\theta}, & \mathbf{si\ p=q}\\ \mathbf{0}, & \mathbf{si\ p\neq q}\end{cases}$, donde $\boldsymbol{\theta}$ es la identidad de K^{Σ^*}. Si n=1, entonces $\mathbf{E^1{}_{pq}} = \sum_{\mathbf{r\in Q}}\mathbf{E_{pq}(1_Q)_{rp}} = \sum_{\mathbf{r\in Q}}\mathbf{E_{pr}E^0{}_{rq}}$

Supóngase que el resultado es cierto para $n-1$, $n\geq 2$; es decir, $E^{n-1}{}_{pq} = \sum_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}\in Q} E_{pr_1}E_{pr_1r_2}\cdots$ $E_{r_{n-1}} = \sum_{r\in Q}E_{pr}E^{n-2}{}_{rq}$, entonces $E^n{}_{pq} = \sum_{r\in Q}E_{pr}E^{n-1}{}_{rq} = \sum_{r_1\in Q}E_{pr_1}\left(\sum_{r_1,r_2,\ldots,r_n\in Q}E_{r_1r_2}E_{r_1r_3}\cdots E_{r_nq}\right) = \sum_{r_1,r_2,\ldots,r_n\in Q}E_{pr_1r_2}E_{r_1r_2}\cdots E_{r_nq} = \sum_{r\in Q}E_{pr}E^{n-2}{}_{rq}$

En consecuencia, $E^n{}_{pq}$ es la suma de las etiquetas de caminos con longitud n. Por lo tanto, $E^*{}_{pq}$ es la suma de las etiquetas de $c\colon p\to q$ en $\mathbf{A}$.

Corolario 1. El comportamiento de $\mathbf{A}$ es $|\mathbf{A}| = \mathrm{I}\mathbf{E}^*\mathrm{T}$ con I visto como un vector fila y T como un vector columna.

Demostración: $|\mathbf{A}| = \sum_{\mathbf{p,q\in Q}}\sum_{\mathbf{c}}\mathbf{I(p)\,|c|T(q)} = \sum_{\mathbf{p,q\in Q}}\mathbf{I(p)\,E^*{}_{pq}\,T}$.

Definición 8. Sean K un semianillo conmutativo, y Σ un alfabeto finito. Un K-subconjunto A de Σ^* es llamado regular, si existe un K-Σ-autómata $\mathbf{A}$ tal que $|\mathbf{A}| = $ A.

En lo que sigue, siempre se asume que dados dos K-Σ-autómatas $\mathbf{A}=(Q_A,\Sigma,E_A,I_A,T_A)$ y $\mathbf{B}=(Q_B,\Sigma,E_B,I_B,T_B)$, $Q_A\cap Q_B=\emptyset$.

Definición 9. Sean $\mathbf{A},\mathbf{B}$ dos K-Σ-autómatas, el K-Σ-autómata unión de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es dado por $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=(Q_{A\cup B},\Sigma,E_{A\cup B},I_{A\cup B},T_{A\cup B})$, donde, $Q_{A\cup B} = Q_A\cup Q_B$,

$$\mathbf{I_{A\cup B}(p)} = \begin{cases}\mathbf{I_A(p)}, & \mathbf{si\ p\in Q_A}\\ \mathbf{I_B(p)}, & \mathbf{si\ p\in Q_B}\end{cases},$$

$$\mathbf{T_{A\cup B}(p)} = \begin{cases}\boldsymbol{T_A}\mathbf{(p)}, & \mathbf{si\ p\in Q_A}\\ \mathbf{T_B(p)}, & \mathbf{si\ p\in Q_B}\end{cases},$$

y

$$\mathbf{E_{A\cup B}(p,\alpha,q)} = \begin{cases}\mathbf{E_A(p,\alpha,q)}, & \mathbf{si\ p,q\in Q_A}\\ \mathbf{E_B(p,\alpha,q)}, & \mathbf{si\ p,q\in Q_B}\\ \mathbf{0}, & \mathbf{en\ otro\ caso}\end{cases}$$

Proposición 1. La unión de dos K-subconjuntos regulares de Σ^* es un K-subconjunto regular de Σ^*.

Demostración: Considere A y B dos K-subconjuntos regulares de Σ^*, y $\mathbf{A},\mathbf{B}$ dos K-Σ-autómatas tales que $|\mathbf{A}|$=A y $|\mathbf{B}|$=B. Sea el K-Σ-autómata $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$. Entonces, para todo $s\in\Sigma^*$,

$$|\mathbf{A}\cup\mathbf{B}| = \left(\sum_{\mathbf{p,q\in Q_{A\cup B}}}\sum_{\mathbf{c}}\mathbf{I_{A\cup B}(p)\,|c|T_{A\cup B}(q)}\right)\mathbf{(s)}$$
$$= \sum_{\mathbf{p,q\in Q_{A\cup B}}}\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{I_{A\cup B}(p)\,kT_{A\cup B}(q)},$$

donde k∈K es tal que existe $\mathbf{c}: \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ en $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ con |c|=ks; así,

$$\sum_{\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbf{Q_{A \cup Q_B}}} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{I_{A \cup B}(p)\, kT_{A \cup B}(q)}$$
$$= \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbf{Q_A}} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{I_A\,(p)\, kT_A(q)}$$
$$+ \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbf{Q_B}} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{I_B\,(p)\, kT_B(q)} = |\mathbf{A}|(\mathbf{s}) + |\mathbf{B}|(\mathbf{s})$$
$$= \mathbf{A(s)} + \mathbf{B(s)}$$
$= (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})(\mathbf{s})$. **Asi**, $|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$.

Definición 10. Sean **A, B** dos K-Σ-autómatas. El K-Σ-autómata producto (o intersección) de **A** y **B** es dado por $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(Q_{A\times B},\Sigma,E_{A\times B},I_{A\times B},T_{A\times B})$, con $Q_{A\times B}=Q_A\times Q_B$, $I_{A\times B}((p,q))=I_A(p)I_B(q)$, $T_{A\times B}((p,q))=T_A(p)T_B(q)$, $E_{A\times B}((p,q),\alpha,(p',q'))=E_A(p,\alpha,p')E_B(q,\alpha,q')$.

Proposición 2. La intersección de dos K-subconjuntos regulares de Σ* es un K-subconjunto regular de Σ*.

Demostración: Sean A y B dos K-subconjuntos regulares de Σ* y **A**, **B** dos K-Σ-autómatas tales que |**A**|=A y |**B**|=B. Sea el K-Σ-autómata **A**×**B**. Entonces, para todo s∈Σ*,

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|(s) = \left(\sum_{(\mathbf{p,q}),(\mathbf{p',q'})\in \mathbf{Q_{A\times Q_B}}} \sum_{\mathbf{c}} \mathbf{I_{A\times B}(p,q)|c|T_{A\times B}(p',q')}\right)(\mathbf{s})$$
$$= \left(\sum_{p,p',\in Q_A;\, q,q',\in Q_B} \sum_{\mathbf{c}=(\mathbf{c}',\mathbf{c}'')} \mathbf{I_A(p)I_B}(q)|(\mathbf{c}',\mathbf{c}'')|\mathbf{T_A(p')T_B(q')}\right)(\mathbf{s})$$
$$= \sum_{p,p',\in Q_A;\, q,q',\in Q_B} \sum_{\mathbf{k_1,k_2}} \mathbf{I_A(p)k_1T_A(p')I_B}(q)\mathbf{k_2T_B(q')}$$
$$= \sum_{p,p',\in Q_A} \sum_{k_1,} I_A(p)k_1T_A(p') \sum_{q,q',\in Q_B} \sum_{k_2} I_B(q)k_2T_B(q')$$
$$= \left(\sum_{p,p',\in Q_A} \sum_{c'} I_A(p)|c'|\, T_A(p')\right)(s)\left(\sum_{q,q',\in Q_B} \sum_{c'} I_B(q)|c''|T_B(q')\right)(s)$$
$= |\mathbf{A}|(s)|\mathbf{B}|(s) = (|\mathbf{A}| \cap |\mathbf{B}|)(s) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})(s)$.

Donde $c': \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p}'$ es un camino en **A**, $c'': \mathrm{q} \rightarrow \mathrm{q}'$ es un camino en **B**, $|c'|=k_1s$, $|c''|=k_2s$ y $k_1k_2=k$ con ks=|c|.

Definición 11. Sea **A**=(Q,Σ,E,I,T) un K-Σ-autómata. Se llama K-Σ-autómata inverso al **K-Σ**-autómata $\mathbf{A}^{\varphi}=(Q,\Sigma,E_{\varphi},I_{\varphi},T_{\varphi})$, donde $I_{\varphi}(q)=T(q)$, $T_{\varphi}(q)=I(q)$, y $E_{\varphi}(p,\alpha,q)=E(p,\alpha,q)$.

Observación 1. Un camino c^{φ}: p→q en $\mathbf{A}^{\varphi}$, con etiqueta $|c^{\varphi}|$=ks, es dado por un camino c: q⟶p en **A** con etiqueta |c|=kφ(s), donde φ: Σ*→Σ* es la función inversa definida por φ(θ)=θ, φ(α)=α, φ(st)=φ(t)φ(s), donde t,s∈Σ*.

Proposición 3. Si A es un K-subconjunto regular de Σ* y φ: Σ*→Σ* es la función inversa dada en la **Observación 1**, entonces $\mathbf{A} \circ \boldsymbol{\varphi}$ es un K-subconjunto regular de Σ*; es decir, la clase de K-subconjuntos regulares de Σ* es estable bajo función inversa.

Demostración: Sea A un K-subconjunto regular de Σ* y **A** un K-Σ-autómata tal que |**A**|=A.Considere $\mathbf{A}^{\varphi}$ el K-Σ-autómata inverso de **A**, entonces para todo s ∈ Σ*,

$$|\mathbf{A}^{\boldsymbol{\varphi}}|(\mathbf{s}) = \left(\sum_{\mathbf{p,q}\in\mathbf{Q}} \sum_{\mathbf{c}^{\boldsymbol{\varphi}}} \mathbf{I}_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{p})\,|\mathbf{c}^{\boldsymbol{\varphi}}|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{q})\right)(\mathbf{s})$$
$$= \sum_{\mathbf{p,q}\in\mathbf{Q}} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{T(p)\,kI(q)},$$

con $|c^{\varphi}|$=ks, donde k∈K y

$$|\mathbf{c}| = \mathbf{k}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{s}) = \left(\sum_{\mathbf{p,q}\in\mathbf{Q}} \sum_{c} \mathbf{I\,(q)\,|c\,|T\,(p)}\right)(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{s}))$$
$$= (|\mathbf{A}\,|)(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{s})) = (\mathbf{A} \circ \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{s}).$$
Así, $|\mathbf{A}^{\boldsymbol{\varphi}}| = \mathbf{A} \circ \boldsymbol{\varphi}$.

Definición 12. Sean **A**=(Q,Σ,E,I,T) un K-Σ-autómata y f: Γ*→Σ* es un homomorfismo fino. Se llama imagen inversa de **A** al K-Γ-autómata $f^{-1}(\mathbf{A})=(Q,\Gamma,E',I,T)$, donde E' es dado por

$$\mathbf{E}'\,(\mathbf{p},\boldsymbol{\gamma},\mathbf{q}) = \begin{cases} \mathbf{E\,(p,\alpha,q)}, & \mathbf{si\ \ f(\gamma) = \alpha\ \ y\ \ E\,(p,\alpha,q) \neq 0} \\ \mathbf{1}, & \mathbf{si\ \ f(\gamma) = \theta\ \ y\ \ p = q} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{en\ otro\ caso} \end{cases}$$

Observación 2. Un camino $\mathbf{c}: \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ en f^{-1}(A), con etiqueta |c| = kg, es dado como c=(c',g) donde $\mathbf{c}': \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}$ es un camino en **A** y g∈Γ* es tal que |c'| = kf(g); esto es, un camino $\mathbf{c}: \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ en f^{-1}(A), el cual asocia algún g∈Γ* en su etiqueta,es dado por un camino c' en **A** el cual asocia f(g) en su etiqueta.

Proposición 4. Si f: Γ*→Σ* es un homomorfismo fino y A es K-subconjunto regular de Σ*, entonces A∘f es un K-subconjunto regular de Γ*.

Demostración: Sea **A** un K-Σ-autómata tal que |**A**|=A. Considere el K-Γ-autómata $f^{-1}(\mathbf{A})$, la imagen inversa de **A**, y sea g∈Γ*, entonces

$$|\mathbf{f}^{\,-1}(\mathbf{A})|(\mathbf{g}) = \left(\sum_{\mathbf{p,q}\in\mathbf{Q}} \sum_{c} \mathbf{I\,(p)\,|c\,|T\,(q)}\right)(\mathbf{g})$$

$$= \left(\sum_{\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbf{Q}} \sum_{\mathbf{c}'} \mathbf{I}(\mathbf{p})\,|\mathbf{c}'|\mathbf{T}(\mathbf{q}) \right)(\mathbf{f}(\mathbf{g})) = |\mathbf{A}|(\mathbf{f}(\mathbf{g}))$$
$$= (\mathbf{A}\circ\mathbf{f})(\mathbf{g}).$$

Así, $|\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{A})| = \mathbf{A}\circ\mathbf{f}$.

Definición 12. Sea f: $\Gamma^*\to\Sigma^*$ un homomorfismo, tal que $f(\gamma)\neq\theta$, $\forall\gamma\in\Gamma$, y sea $\mathbf{A}=(Q,\Gamma,E,I,T)$ un K-Γ-autómata. Se llama imagen directa de $\mathbf{A}$ al K-Σ-autómata $f(\mathbf{A})=(Q',\Sigma,E',I',T')$, donde $Q'\supset Q$ y E' son dados de la manera siguiente: Sea $E(p,\gamma,q)=k\neq 0$ en $\mathbf{A}$, y sea f $(\gamma)=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$, con $n\geq 1$. Si $n=1$, entonces $E'(p,\alpha_1,q)=E(p,\gamma,q)=k$, es un arco en $f(\mathbf{A})$. Si $n>1$, los arcos consecutivos $\mathbf{p}\xrightarrow{\mathbf{k_1\alpha_1}}\mathbf{q_1}\xrightarrow{\mathbf{k_2\alpha_2}}\cdots\mathbf{q_{n-1}}\xrightarrow{\mathbf{k_n\alpha_n}}\mathbf{q}$ con $k_1\cdots k_n=k$, están en $f(\mathbf{A})$, donde $q_1,\cdots,q_{n-1}$ son nuevos estados agregados a Q. Estos determinan estados de Q'. Finalmente, repitiendo ese proceso para todo arco en $\mathbf{A}$, se obtiene $f(\mathbf{A})$, con

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}') = \begin{cases} \mathbf{I}(\mathbf{p}'), & \mathbf{si}\ \ \mathbf{p}'\in\mathbf{Q} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{si}\ \ \mathbf{p}'\in\mathbf{Q}'\backslash\mathbf{Q} \end{cases}$$

y

$$\mathbf{T}'(\mathbf{p}') = \begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{p}'), & \mathbf{si}\ \mathbf{p}'\in\mathbf{Q} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{si}\ \mathbf{p}'\in\mathbf{Q}'\backslash\mathbf{Q} \end{cases}$$

Observación 3. Decir que f: $\boldsymbol{\Gamma}^*\to\boldsymbol{\Sigma}^*$ es un homomorfismo tal que $f(\gamma)\neq\theta$, $\forall\gamma\in\Gamma^*$ es equivalente a decir que $f^{-1}(\theta)=\theta$, o también es equivalente a que $f^{-1}(s)$ es finito, para todo $s\in\Sigma^*$.

Proposición 5. Sea f: $\Gamma^*\to\Sigma^*$ un homorfismo tal que $f^{-1}(s)$ es finito, paratodo $s\in\Sigma^*$. Si A es K-subconjunto regular de Γ^*, entonces $f(A)$: $\Sigma^*\to K$, dado por

$$\mathbf{f}(\mathbf{A})\ (\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{g}\in\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{s})} \mathbf{A}(\mathbf{g})$$

es un K-subconjunto regular de Σ^*.

Demostración: Considere $\mathbf{A}$ un K-Γ-autómata tal que $|\mathbf{A}|=A$. Sea $f(A)$ el K-Σ-autómata imagen directa de $\mathbf{A}$, entonces, para todo $s\in\Sigma^*$, se tiene que

$$|\mathbf{f}(\mathbf{A})| = \sum_{\mathbf{p}',\mathbf{q}'\in\mathbf{Q}'} \sum_{c'} \mathbf{I}'(\mathbf{p}')\,|\mathbf{c}'|\,\mathbf{T}'(\mathbf{q}')$$
$$= \left(\sum_{\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbf{Q}} \sum_{\mathbf{c}'} \mathbf{I}(\mathbf{p})\,|\mathbf{c}'|\mathbf{T}(\mathbf{q}) \right)$$

Luego,

$$|\mathbf{f}\ (\mathbf{A})| = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbf{Q}} \sum_{k} \mathbf{I}(\mathbf{p})\,\mathbf{kT}(\mathbf{q}),$$

con k variando sobre $\mathbf{c}'$: $\mathbf{p}\to\mathbf{q}$, con $|c'|=ks$, $s=f(g)$, $kg=|c|$, $\mathbf{c}$: $\mathbf{p}\to\mathbf{q}$ en $\mathbf{A}$. Así,

$$|\mathbf{f}\ (\mathbf{A})| = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbf{Q}} \sum_{k} \mathbf{I}(\mathbf{p})\,\mathbf{kT}(\mathbf{q}),$$

con k variando sobre todos los caminos c: $\mathbf{p}\to\mathbf{q}$, tales que $|c'|=kf(g)$, $g\in f^{-1}(s)$, $kg=|c|$, c: $p\to q$ en $\mathbf{A}$.

Por lo tanto,

$$|\mathbf{f}\ (\mathbf{A})|(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{g}\in\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{s})} \left(\sum_{\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbf{Q}} \sum_{k} \mathbf{I}(\mathbf{p})\,\mathbf{kT}(\mathbf{q}) \right)$$

con k variando sobre todos los caminos c: $p\to q$ en $\mathbf{A}$, $kg=|c|$; esto es,

$$|\mathbf{f}\ (\mathbf{A})|(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{g}\in\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{s})} |\mathbf{A}|(\mathbf{g}) = \sum_{\mathbf{g}\in\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{s})} \mathbf{A}(\mathbf{g})$$

Finalmente, f(A) es un K-subconjunto regular de Σ^*.

Definición 13. Un K-Σ-autómata $\mathbf{A}=(Q,\Sigma,E,I,T)$ es llamado normalizado si $\mathbf{I}=\mathbf{i}$ y $T=t$ son dos $\mathbf{K}$-subconjuntos simples distintos, y no existen arcos $\mathbf{p}\xrightarrow{\mathbf{k\alpha}}\mathbf{i}$, $\boldsymbol{t}\xrightarrow{\mathbf{k\alpha}}\mathbf{q}$ con $k\neq 0$; esto es, $E(q,\alpha,\mathbf{i})=E(t,\alpha,q)=0$, para todo $q\in Q$ y $\alpha\in\boldsymbol{\Sigma}$.

Observación 4. Si $\mathbf{A}$ es normalizado, entonces $|A|(\theta)=0$. Luego, si se observaa $\boldsymbol{\Sigma}^+$ como un $\mathbf{B}$-subconjunto de Σ^*, se obtiene $|\mathbf{A}|\subset\boldsymbol{\Sigma}^+$.

Proposición 6. Para todo K-Σ-autómata $\mathbf{A}$ existe un K-Σ-autómata normalizado $\mathbf{A}'$ tal que $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|\cap\Sigma^*$.

Demostración: Sea $\mathbf{A}=(Q,\Sigma,E,I,T)$ un K-Σ-autómata, y sea $Q'=Q\cup i\cup t$, donde i y t son dos estados nuevos diferentes. Considere la nueva matriz $\mathbf{E}'$ como sigue: $\mathbf{E}'_{\mathbf{pq}} = \mathbf{E}_{\mathbf{pq}}$,

$\mathbf{E}'_{\mathbf{iq}} = \sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Q}} \mathbf{I_p E_{pq}}$, $\mathbf{E}'_{\mathbf{pt}} = \sum_{\mathbf{q}\in\mathbf{Q}} \mathbf{E_{pq} T_q}$, $\mathbf{E}'_{\mathbf{it}} = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbf{Q}} \mathbf{I_p E_{pq} T_q}$,

$\mathbf{E}'_{\mathbf{pi}} = \mathbf{E_{ti}} = \mathbf{E_{tq}} = \emptyset$, donde $\mathbf{I_p} = \mathbf{I}(\mathbf{p})$ y $\mathbf{T}_{\boldsymbol{q}} = \mathbf{T}(\mathbf{q})$. Un cálculo determina que $\mathbf{E}'^*_{\boldsymbol{it}} = \mathbf{IE^+T}$, donde $\mathbf{E}^+ = \mathbf{E} + \mathbf{E}^2 + \cdots + \mathbf{E}^{\boldsymbol{n}} + \cdots = \mathbf{EE}^+$.

El K-Σ-autómata $A'=(Q',\Sigma,E',i,t)$ es normalizado, y usando el **Corolario 1** se tiene $|\mathbf{A}'| = \mathbf{E}'^*_{\boldsymbol{it}} = \mathbf{IE^+T} = \mathbf{IE^*T}\cap\boldsymbol{\Sigma}^+ = |\mathbf{A}|\cap\boldsymbol{\Sigma}^+$.

Observación 5. La construcción de $\mathbf{A}'$ desde $\mathbf{A}$, tal como en la **Proposición 6**, es siempre interpretada como el diseño de normalización.

Proposición 7. Sea A un K-subconjunto regular de Σ^*, y sea k∈K, entonces kA es un K-subconjunto regular de Σ^+.

Demostración: Sea **A** un K-Σ-autómata tal que $|\mathbf{A}| = $ A, y sea k∈K. Considere el K-Σ-autómata k**A**=(Q,Σ,E,kI,T), donde $(kI)_q = kI_q$, entonces

$$|\mathbf{kA}| = \sum_{\mathbf{p,q \in Q}} \mathbf{kI_p E^*_{pq}} \boldsymbol{T_q} = \mathbf{k} \sum_{\mathbf{p,q \in Q}} \mathbf{I_p E^*_{pq}} \boldsymbol{T_q}$$
$$= \mathbf{k}|\mathbf{A}| = \mathbf{kA}$$

Proposición 8. Un K-subconjunto A de Σ^* es regular, si y solo si, el K-subconjunto $A' = A \cap \Sigma^+$ también lo es.

Demostración: Sea **A** un K-Σ-autómata tal que $|\mathbf{A}| = $ A. Entonces, existe un K-Σ-autómata normalizado **A'** tal que $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}| \cap \Sigma^+ = A \cap \Sigma^+ = A'$. Recíprocamente, supóngase que $A \cap \Sigma^+ = A'$ es un **K**-subconjunto regular de Σ^*. Como $A'(\theta) = 0 (\Sigma^+(\theta) = 0)$, se tiene que $A = k\theta + A'$, donde $k = A(\theta)$. Luego, como θ es un K-subconjunto regular de Σ^*, entonces desde la **Proposición 1** y la **Proposición 7** se tiene que A es regular.

Proposición 9. Si A y B son dos K-subconjuntos regulares de Σ^*, entonces AB es un K-subconjunto regular.

Demostración: Sea $A = k\theta + A', B = l\theta + B'$, con $A' = A \cap \Sigma^+$, $B' = B \cap \Sigma^+$, $k = A(\theta)$ y $l = B(\theta)$. Entonces, $AB = kl(\theta) + kB' + lA' + A'B'$. Basta demostrar que A'B' es regular, para ello, sean $\mathbf{A} = (Q_1, \Sigma, E_1, i_1, t_1)$ y $\mathbf{B} = (Q_2, \Sigma, E_2, i_2, t_2)$ dos K-Σ-autómatas normalizados que reconocen a A' y B' respectivamente. Considere el K-Σ-autómata normalizado $C = (Q, \Sigma, E, i_1, t_2)$, donde Q es una partición de Q_1 y Q_2, excepto cuando $t_1 = i_2$. Luego, un arco en **C** es un arco en **A** o es un arco en **B**. Así, $|\mathbf{C}| = \mathbf{E}^*_{\mathbf{i_1 t_2}} = \mathbf{E}^*_{\mathbf{1 i_1 t_2}} = \mathbf{E}^*_{\mathbf{2 i_2 t_2}} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = \mathbf{A'B'}$.

Proposición 10. Sea A un K-subconjunto regular de Σ^+. Entonces, los K- sub- conjuntos $A^+ = A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots$ y $A^* = \theta + A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots$ son regulares.

Demostración: Ya que $A \subset \Sigma^+$, se tiene que $A^n(s) = 0$, cuando $|s| < n$. Luego, $\{A^n\}_{n \in N}$ es localmente finita; así, A^+ y A^* están bien definidos. Sea **A**=(Q,Σ,E,i,t) un K-Σ-autómata normalizado que reconoce a A. Entonces, considerando a i y a t como un solo estado, el cual es inicial y final, se obtiene un K-Σ-autómata normalizado A^*, donde $|\mathbf{A}^*| = \mathbf{A}^*$. Así, $\mathbf{A}^*$ es regular. Luego, ya que $A^+ = A^* \cap \Sigma^+$, se obtiene que A^+ es regular.

Teorema 2. Un K-subconjunto A de Σ^+ es regular, si y solo si, existe un entero n>1 y una matriz E n×n cuyas entradas son K-subconjuntos de Σ tal que $A = E^+$.

Demostración: Sea $\boldsymbol{A}$ un $\boldsymbol{K}$-subconjunto regular de $\boldsymbol{\Sigma} +$, y $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{t})$ un $\boldsymbol{K} - \boldsymbol{\Sigma} -$autómata normalizado que reconoce a $\boldsymbol{A}$. No hay perdida de generalidad en suponer que $\boldsymbol{Q} = \mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{n}\}$, con $\boldsymbol{i} = \mathbf{1}$ y $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n}$. Ya que $\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{t}$ se tiene que $\boldsymbol{n} > \mathbf{1}$. Luego, desde el **Corolario 1** se sigue que $|\mathbf{A}| = \mathbf{E}^*_{\boldsymbol{in}} = \mathbf{E}^+_{\boldsymbol{in}} = \mathbf{A}$. Recíprocamente, si, $\mathbf{A} = \mathbf{E}^+_{\mathbf{1}\boldsymbol{n}}$, donde $\boldsymbol{E}$ es una matriz n×n de K-subconjuntos de Σ y n>1, entonces, con Q={1,⋯,n}, I=1 y T=n, se obtiene un K-Σ-autómata **A**=(Q,Σ,E,1,n) tal que $|\mathbf{A}| = E^+ = A$.

Corolario 2. Si E es una matriz n×n de K-subconjuntos de Σ, entonces para cualesquiera $1 \leq i, j \leq n$, los K-subconjuntos $\mathbf{E}^*_{\boldsymbol{ij}}$ y $\mathbf{E}^+_{\boldsymbol{ij}}$ son regulares.

Demostración: Se sigue del **Teorema 2**.

Proposición 11. Sea φ: K→K′ un homomorfismo de semianillos. Si A es un K-subconjunto regular de Σ^*, entonces φ ∘ A es un K′-subconjunto regular de Σ^*.

Demostración: Sea **A**=(Q,Σ,E,I,T) un K-Σ-autómata tal que $|\mathbf{A}| = A$, entonces el K′-Σ-autómata φ(**A**)=(Q,Σ, φ(E),φ(I),φ(T)) satisface $|\varphi(A)| = \varphi(|A|) = \varphi(A)$. Como K es un semianillo positivo, entonces T: K→**B**, dado por T(0)=0 y T(x)=1, para todo x≠0, es un homomorfismo.

Corolario 3. Si K es un semianillo positivo, y A es un K-subconjunto regular de Σ^*, entonces T(A) es un **B**-subconjunto regular de Σ^*.

Demostración: Se sigue desde la composición del autómata imagen y de la **Proposición 11**.

Proposición 12. Sea A un **B**-subconjunto regular de Σ^*. Entonces, A visto como un K-subconjunto no ambiguo de Σ^* es regular.

Demostración: Sea **A** un Σ-autómata determinístico con dinámica A. Si **A** es visto como un K-Σ-autómata, entonces su dinámica es vista como un K-subconjunto de Σ^*.

Observación 6. El **Corolario 3** y la **Proposición 12** muestran simultáneamente que para cualesquiera subconjuntos no ambiguos de Σ^*, la regularidad es independiente de la escogencia de K.

4 Ecuaciones Lineales de Lenguajes

En este trabajo se consideran los conjuntos racionales (también conocidos como conjuntos regulares). Se demuestra el Teorema de Kleene, el cual establece la equivalencia entre las clases de conjuntos regulares y racionales. Finalmente, se describe el comportamiento o dinámica de un autómata usando ecuaciones lineales. Para ello es necesario incluir las nociones de *K*-+-álgebras y *K*-subconjuntos racionales; así como, las operaciones fundamentales que determinan la generación de la dinámica de un K-Σ-autómata.

Definición 14. Sea K un semianillo conmutativo. Un álgebra sobre K (o una K- álgebra) consiste de un conjunto A dotado de tres operaciones: dos operaciones binarias: suma y multiplicación en A, y una externa: para cada $k\in K$ y $a\in A$ se tiene que $ka\in A$. Dichas operaciones cumplen los siguientes axiomas: $a+b=b+a$; $a+(b+c)=(ab)+c$; $(k_1k_2)a=k_1(k_2a)$; $1a=a$, donde 1 representa la identidad de K; Existe un único $\emptyset\in A$ tal que $0a=\emptyset$, donde 0 representa el elemento nulo de K; $k_1(a+b)=k_1a+k_1b$; $(k_1+k_2)a=k_1a+k_2a$; $a(bc)=(ab)c$; $(a+b)c=ac+bc$; $a(b+c)=ab+ac$; $k_1(ab)=(k_1a)b=a(k_1b)$.

Como en el en el caso de los semianillos, la operación $a+b$ puede ser reemplazada por la operación $\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\boldsymbol{a_i}$, para cualquier conjunto finito de indices I, y los axiomas pueden ser reformulados adecuadamente.

Definición 15. Sea K un semianillo conmutativo completo y A una K-álgebra. Si $\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\boldsymbol{a_i}$ está bien definida como un elemento de A, para cualquier familia de indices I, entonces A es llamada una K-álgebra completa.

Definición 16. Sea K un semianillo conmutativo. Una K-+-álgebra A es un conjunto con una operación binaria sobre A, a^+, donde a^+ representa la suma infinita $a+a^2+\cdots+a^n+\cdots$. En adición, A es llamada unitaria si existe $1\in A$ tal que $1a=a=a1$, para todo $a\in A$.

Por otra parte, si K es completo y A es una K-álgebra completa, entonces A puede ser transformada en una K-+-álgebra, poniendo $\mathbf{a}^+=\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\boldsymbol{a^n}$, para todo $a\in A$; también, si A es una K-+-álgebra unitaria, entonces se denota $a^*=1+a^+$, y si A no es unitaria se escribe $a^*b=a^+b+b$ y $ba^*=b+ba^+$.

Definición 17. Sea A una K-+-álgebra, y sea $B\subset A$ no vacío. B es una subálgebra de A si, para todo $a,b\in B$ y $k\in K$ se tiene que $a+b$, ab, ka, a^+ están en B.

Definición 18. Sea A una K-+-álgebra, y sea B un subconjunto de A. La clausurade de B, denotada por B, es dada por $\overline{\boldsymbol{B}}=\bigcap_{\boldsymbol{C}\in\boldsymbol{\mathcal{C}}}\boldsymbol{C}$, donde $\boldsymbol{\mathcal{C}}=\{\boldsymbol{C}:\boldsymbol{C}$ es una subálgebra de A que contiene a B$\}$.

En lo que sigue, $\overline{\boldsymbol{B}}$ también es llamada clausura racional de B, y se hace referencia a sus operaciones como operaciones racionales; así, $\overline{\boldsymbol{B}}$ es una subálgebra racionalmente cerrada y cada elemento de $\overline{\boldsymbol{B}}$ es llamado racional. Se enfatiza que $\overline{\boldsymbol{B}}$ es la subálgebra más pequeña conteniendo a B.

Por su parte, Sea K^S el conjunto de todos los K-subconjuntos de S, donde K es un semianillo conmutativo completo y S es un semigrupo.

Considere las operaciones $\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\mathbf{A_i}$, kA, y AB, tal como fueron expuestas en la Sección **(3 K- Σ-Autómatas).** Entonces K^S es una K-álgebra completa. Por lo tanto, si se toma $\mathbf{a}^+=\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\boldsymbol{a^n}$, se tiene que K^S es una K-+-álgebra. Finalmente, se resaltan las propiedades siguientes: $\emptyset^+=\emptyset$; $aa^+=a^+a$; $a^+=a^*a$; $a^+=(a+\cdots+a^p)(a^p)^*$, $p>1$; $(a^*b)^+=(a+b)^*b$; $(a+b)^+=(a^*b)^+a^*+a^+$; $(ab)^+=a(ba)^*b$.

Ahora, el problema central es emergido en la clausura $\overline{\boldsymbol{B}}$ de B, donde B es la clase detodos los K-subconjuntos simples de S, denotada por Rat_KS. Por supuesto, cuando K es completo y S es un semigrupo, Rat_KS está bien definida. Ahora, supóngase que S es un semigrupo y K es un semianillo conmutativo no necesariamente completo, entonces la fórmula

$$\mathbf{AB(x)}=\sum_{\mathbf{x=yz}}\mathbf{A(y)B(z)}$$

no puede ser utilizada salvo que $x=yz$ corresponda a un número finito de factorizaciones. Más aún, la familia $\{A^n\}_{n\in N}$ no necesariamente es localmente finita, de manera que A^+ no necesariamente está bien definida.

Para solventar esta situación se puede imponer la condición de que S sea un semigrupo localmente finito. En consecuencia, S no tiene elemento idempotente y por lo tanto no tiene elemento identidad. Así, bajo la restricción anterior se tiene que $\mathbf{AB(x)}$ es finita. Más aún, si n es el mayor entero para el cual la factorización $x=x_1\cdots x_n$ existe, entonces $A^p(x)=0$, para $p>n$. Así, $\mathbf{A}^+=\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{A^n}$ está bien definida.

Finalmente, se tiene que K^S es una K-+-álgebra y Rat_KS es definida sin ninguna dificultad, justamente como en el caso cuando K es completo.

Un último comentario, dada la importancia en este trabajo del monoide Σ^* y en consecuencia de $Rat_K\Sigma^*$, establece la consideración de Rat_KM cuando M es un monoide. En este caso, la no definición de $1^*=1+1+\cdots$ invita a considerar algunas restricciones sobre M. En efecto, si M es un monoide localmente finito, entonces $xy=1$ implica que $x=y=1$, puesto que en otro caso se pueden obtener infinitas factorizaciones de la forma $xyxyxy\cdots xy$ de 1. Ahora bien, si $M^-=M\backslash\{1\}$ es un semigrupo, entonces M^- es un semigrupo localmente finito. Recíprocamente, si M^- es cualquier semigrupo localmente finito, entonces el monoide $M=M^-\cup\{1\}$, el cual se obtiene anexando a M^- un elemento identidad 1, es localmente finito.

Considere la clase C de los K-subconjuntos A de M, con M un monoide localmente finito, tales que $A\cap M^{-}\in Rat_K M^{-}$, entonces $Rat_K M^{-}$ está bien definido ya que M^{-} es un semigrupo localmente finito;equivalentemente, $\mathbf{C}$ es la clase de todos los K-subconjuntos $A=k+B$, $B\in Rat_K M^{-}$, donde k=k1, con 1 el elemento identidad de M, k=A(1).

Proposición 13. Sea M un monoide localmente finito. La clase C de todos los K-subconjuntos de M de la forma $A=k+B$, $B\in Rat_K M^{-}$ es la clase más pequeña que contiene todos los K-subconjuntos simples de M y es cerrada bajo las cuatro operaciones racionales, conla operación A^{+} restringida a los K-subconjuntos de $M^{-}=M\backslash\{1\}$. Si K es completo, entonces $C=Rat_K M$.

Demostración: Sean $A,A'\in\mathbf{C}$, entonces $A=k+B$, $A'=k'+B'$ con $B, B'\in Rat_K M$, y sea $l\in K$. Entonces, $A+A'=(k+k')+(B+B')$; $AA'=(k+B)(k'+B')=kk'+(kB'+k'B+BB')$; $lA=l(k+B)=lk+lB$; luego, A+A', AA' y lA son los elementos de C. Si A es K-subconjunto de M^{-}, entonces A=B; en consecuencia, $A^{+}\in Rat_K M^{-}\subset C$. Así, C contiene todos los K-subconjuntos simples de M y es cerrada bajo operaciones racionales. Si C es otra clase que contiene a los K-subconjuntos simples de M, entonces $Rat_K M^{-}\subset C'$ y $K1\subset C'$, con 1 la identidad de M. Luego, $C\subset C'$. Ahora, supóngase que K es un semianillo completo, entonces K^{M} es una K-+-álgebra. Así, basta demostrar que si $A\in C$, entonces $A^{+}\in C$. Luego, C es una subálgebra de K^{M} que coincide con $Rat_K M$. Sea $A\in C$, entonces $A=k+B$, $B\in Rat_K M^{-}$, de manera que $A^{+}=(k+B)^{+}=k^{+}+k^{*}(k^{*}B)^{+}\in C$.

Definición 19. Sea K un semianillo conmutativo y M un monoide localmente finito. $Rat_K M$ es la clase de todos los K-subconjuntos de M de la forma $A=k+B$, $B\in Rat_K M^{-}$.

Teorema 3. (Kleene) Sea K un semianillo conmutativo, y sea Σ un alfabeto finito.Un K-subconjunto A de Σ^{*} es regular, si y solo si, este es racional.

Demostración: Sea $\mathbf{C}$ la clase de todos los K-subconjuntos regulares de Σ^{*}. Los K-subconjuntos simples θ y α, para todo $\alpha\in\Sigma$, son reconocidos por autómatas; así, están en $\mathbf{C}$, con $\mathbf{C}$ cerrado bajo las operaciones racionales, con la operación A^{+} restringida a los K-subconjuntos de Σ^{+}. Así, por la **Proposición 13** $Rat_K\Sigma^{*}\subset C$. Esto prueba el teorema en una dirección.

Recíprocamente, sea $\mathbf{A}=(Q,\Sigma,E,I,T)$ un K-Σ-autómata y sea $Q=\{1,2,3,\cdots,n\}$.Considere los K-subconjuntos regulares $A_{ij}=|(Q,\Sigma,E,i,j)|$, para $1\leq i,j\leq n$.

Como, $|\mathbf{A}|=\sum_{\mathbf{i,j\in Q}}\mathbf{I(i)A_{ij}T(j)I_p}$ entonces es suficiente mostrar que los K-subconjuntos A_{ij} están en $Rat_K\Sigma^{*}$, para $1\leq \mathbf{i},\mathbf{j}\leq n$. Considere, para todo i, j, k con $1\leq i$, $j\leq n$ y $0\leq k\leq n$, el conjunto $\mathbf{C}^{\mathbf{k}}{}_{\mathbf{ij}}=\{c\colon i\to j$ no triviales/ existen caminos no triviales $c'\colon i\to l$, $c''\colon l\to j$, $l\leq k\}$. Sea $\mathbf{B}^{\mathbf{k}}{}_{\mathbf{ij}}$ la suma de las etiquetas de caminos en $\mathbf{C}^{\mathbf{k}}{}_{\mathbf{ij}}$. Como $\mathbf{B}^{\mathbf{0}}{}_{\mathbf{ij}}=\mathbf{E_{ij}}$, se obtiene inductivamente que $\mathbf{B}^{\mathbf{k}}{}_{\mathbf{ij}}=\mathbf{B}^{k-1}{}_{\mathbf{ij}}+\mathbf{B}^{\mathbf{k-1}}{}_{\mathbf{ik}}(\mathbf{B}^{\mathbf{k-1}}{}_{\mathbf{kk}})^{*}\,\mathbf{B}^{\mathbf{k-1}}{}_{\mathbf{kj}}$, $0<k\leq n$: de donde, cualquier camino $\mathbf{c}\colon\mathbf{i}\to\mathbf{j}$ está en $\mathbf{C}^{\mathbf{k}}{}_{\mathbf{ij}}$, si y solo si, c está en $\mathbf{C}^{\mathbf{k-1}}{}_{\mathbf{ij}}$ o c posee una factorización $\boldsymbol{i}\xrightarrow{\mathbf{d}}\mathbf{k}\xrightarrow{\mathbf{c_1}}\mathbf{k}\xrightarrow{\mathbf{c_2}}\cdots\xrightarrow{\mathbf{c_{n-1}}}\mathbf{k}\xrightarrow{\mathbf{c_n}}\mathbf{k}\xrightarrow{\mathbf{c}}\mathbf{j}$, $n\geq 0$, en $\mathbf{C}^{\mathbf{k-1}}{}_{\mathbf{ij}}$. Esta factorización es única. Como $\mathbf{E_{ij}}$ son K-subconjuntos racionales de Σ^{*} se sigue que $\mathbf{B}^{\mathbf{k}}{}_{\mathbf{ij}}$ son racionales, para todo k, con $0\leq k\leq n$. Por lo tanto, $\mathbf{A_{ij}}$ son racionales.

La demostración del Teorema de Kleene proporciona un método eficiente para calcular la dinámica de un K-Σ-autómata. Este método depende del estudio de ecuaciones lineales.

Considere un sistema de n ecuaciones con n incógnitas $\mathbf{X_i}=\sum_{\mathbf{j=1}}^{\boldsymbol{n}}\mathbf{E_{ij}X_j}+\mathbf{T_i}$, $1\leq i\leq n$ donde $\mathbf{E_{ij}}$ y $\mathbf{T_i}$ son K-subconjuntos de Σ^{*} y $\mathbf{X_i}$ son las incógnitas. Tal sistema puede ser visto matricialmente como

$$X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_{11}&E_{12}&\cdots&E_{1n}\\E_{21}&E_{22}&\cdots&E_{2n}\\\vdots&&&\vdots\\E_{n1}&E_{n2}&\cdots&E_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}T_1\\T_2\\\vdots\\T_n\end{pmatrix};$$

es decir, $\mathbf{X}=\mathbf{EX}+\mathbf{T}$.

Proposición 14. El vector $\mathbf{X}=\mathbf{E}^{*}\mathbf{T}$ es una solución del sistema $\mathbf{X}=\mathbf{EX}+\mathbf{T}$.

Demostración: Siendo 1_n la matriz identidad n×n, se tiene que $\mathbf{E}^{*}\mathbf{T}=(\mathbf{1_n}+\mathbf{EE}^{*})\mathbf{T}=\mathbf{T}+(\mathbf{EE}^{*})\mathbf{T}=\mathbf{E}(\mathbf{E}^{*}\mathbf{T})+\mathbf{T}$

Proposición 15. Si $\mathbf{E_{ij}}\subset\Sigma^{+}$, para todo $1\leq i, j\leq n$, (recuerde que $E_{ij}\subset\Sigma^{*}$, equivale a decir que es un K-subconjunto de Σ^{+}), entonces el sistema $\mathbf{X}=\mathbf{EX}+\mathbf{T}$ tiene solución única.

Demostración: Sean X e Y dos K-subconjuntos de Σ^{*} que satisfacen $\mathbf{X}=\mathbf{EX}+\mathbf{T}$. Se puede demostrar que $X_i(s)=Y_i(s)$, para $1\leq i\leq n$, y para todo $s\in\Sigma^{*}$. Para esto, se procede por inducción sobre la longitud de la palabra s. Si $|s|=0$, entonces $s=\theta$. Luego, por hipótesis, se tiene que $E_{ij}(\theta)=0$. En consecuencia, $X_i(\theta)=T_i(\theta)=Y_i(\theta)$. Supóngase que $X_i(s)=Y_i(s)$, para todo $s\in\Sigma^{*}$, $|s|>0$. Entonces, $\mathbf{X_i}\,(\mathbf{s})=\sum_{\mathbf{j}}(\mathbf{E_{ij}X_j})(\boldsymbol{s})+\mathbf{T_i}(\boldsymbol{s})=\sum_{\mathbf{j}}\sum_{\mathbf{vw=s}}\mathbf{E_{ij}(v)X_j(w)}+\mathbf{T_i(s)}$. Análogamente, $\mathbf{Y_i}\,(\mathbf{s})=\sum_{\mathbf{j}}\sum_{\mathbf{vw=s}}\mathbf{E_{ij}(v)Y_j(w)}+\mathbf{T_i(s)}$. Como $\mathbf{E_{ij}(v)}=\mathbf{0}$, cuando $\mathbf{v}=\boldsymbol{\theta}$, entonces se puede excluir de la suma el caso $\mathbf{v} = \boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{w} = \mathbf{s}$; es decir, considere sólo el caso |w|<|s|. Por hipótesis de inducción, $X_i(w) = Y_i(w)$. Por lo tanto, $X_i(s) = Y_i(s)$.

Proposición 16. Si $\boldsymbol{Eij} \subset \Sigma^+$ y $\boldsymbol{Eij}$, $\mathbf{T_i} \in$ RatKΣ*, para todo $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \leq \boldsymbol{n}$, entonces la solución única $\boldsymbol{X}$ de $\mathbf{X} = \mathbf{EX} + \mathbf{T}$ es tal que $X_1, X_2, \cdots, X_n \in$ RatKΣ*, donde

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

Demostración: Procediendo por inducción sobre n: si n = 1, entonces $\mathbf{X_1} = \mathbf{E}^*{}_{\mathbf{11}}\mathbf{T_1} = \mathbf{T_1} + \mathbf{E}^+{}_{\mathbf{11}}\mathbf{T_1}$, es solución de $\mathbf{X} = \mathbf{EX} + \mathbf{T}$, y está en RatKΣ*. Supóngase que la proposición es verdadera para n > 1. Esto es

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{pmatrix},$$

es tal que, $\mathbf{X_i} \in$ RatKΣ*, i = 1,⋯,n − 1. Considere

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

y sea la n-ésima ecuación $\mathbf{X_n} = \mathbf{E_{nn}X_n} + \mathbf{C} + \mathbf{T_n}$, con $\mathbf{C} = \mathbf{E}_{\mathbf{n1}}\mathbf{X_1} + {+}\mathbf{E}_{\mathbf{n(n-1)}}\mathbf{X_{(n-1)}}$. Como $\mathbf{E}_{\mathbf{n1}} \subset \Sigma^+$; entonces desde la **Proposición 14** y **Proposición 15**, se sigue que $\mathbf{X_n} = \mathbf{E}^*{}_{\mathbf{nn}}(\mathbf{C} + \mathbf{T_n})$. Sustituyendo en las primeras n−1 ecuaciones se obtiene el sistema $\mathbf{X} = \mathbf{E'X} + \mathbf{T'}$, de n−1 ecuaciones con n−1 incógnitas, donde $\mathbf{E'}_{\boldsymbol{ij}} = \mathbf{E}_{\mathbf{ij}} + \mathbf{E}_{\mathbf{in}}\mathbf{E}^*{}_{\mathbf{nn}}\mathbf{E}_{\mathbf{nj}}$ y $\mathbf{T'}_{\boldsymbol{i}} = \mathbf{T_i} + \mathbf{T}_{\mathbf{in}}\mathbf{T}^*{}_{\mathbf{nn}}\mathbf{T}_{\mathbf{n}}$; de donde, $\mathbf{E}_{\mathbf{ij}} \subset \Sigma^+$ y $\mathbf{T'}_{\boldsymbol{i}}$, $\mathbf{E'}_{\boldsymbol{ij}} \in$ RatKΣ*. Luego, por hipótesis de inducción se sigue que $\mathbf{C} \in$ RatKΣ*. Así, $\mathbf{X_n} \in$ RatKΣ*. Además, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ satisfacen el sistema. Así, se obtiene el resultado deseado.

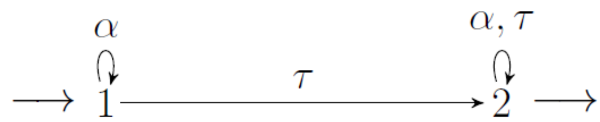
Teorema 4. Sea $\mathbf{A}$=(Q,Σ,E,I,T) un K-Σ-autómata con Q={1,⋯,n} y con matriz de transición E, entonces $|\mathbf{A}| = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \mathbf{I_i X_i}$, donde $\mathbf{I_i}$ es el valor de I en el estado i y

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

es la única solución del sistema de ecuaciones $\mathbf{X} = \mathbf{EX} + \mathbf{T}$.

Demostración: Sea A = (Q, Σ, E, i, T) y Q={1⋯,n}. Sea X_i=|(Q, Σ, E, **I**, T)|, para todo 1 ≤i≤n. Por el **Corolario 1**, $\mathbf{X_i} = (\mathbf{E^*T})_\mathbf{i}$ de manera que $\mathbf{X} = \mathbf{E^*T}$. Como $\mathbf{E}_{\mathbf{ij}} \subset \Sigma$, entonces por la forma matricial del sistema dada en el Teorema de Kleene, **X** es la solución única del sistema $\mathbf{X} = \mathbf{EX} + \mathbf{T}$. Ahora, ya que todos los coeficientes están en RatKΣ*, entonces desde la **Proposición 16** se sigue que $X_1, \cdots, X_n$ están en RatKΣ*. Luego, $|\mathbf{A}| = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \mathbf{I_i X_i} \in$ RatKΣ*.

Ejemplo 3. Considere el autómata dado en la figura siguiente.



Las ecuaciones son $\mathbf{X_1} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{X_1} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{X_2}$ y $\mathbf{X_2} = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\tau})\mathbf{X_2} + \boldsymbol{\theta}$; así, $\mathbf{X_2} = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\tau})^*$. Luego, sustituyendo se tiene que $\mathbf{X_1} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{X_1} + \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\tau})^* = \boldsymbol{\alpha}^*\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\tau})^*$; luego, $|\mathbf{A}| = \sum_{\mathbf{i=1}}^{2} \mathbf{I_i X_i} = \boldsymbol{\alpha}^*\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\tau})^*$.

Referencias

Branicky, M., (**1995**). «Studies in hibrid systems: Modeling, analysis and control». En: PhD thesis, Massachusetts inst technol. Cambridge, Dept. Elec. Fng. And computer Sci.

Caspi, P., (**1991**). «Model of Discrete event systems in computer science». En: Proc. ECC 91. European control conference, Grenoble. France.

Eilemberg, S., (**1974**) «Automata, languages and Machines». En: Academic Press, New York Vol. A.

Mata, G., (**2017**). «Supervisory control application to solving optimal control problems for discrete event systems». En: Revista Ingeniería UC Vol.24 núm.1, pp. 81-90.

Mata, G., (**2018**) et al. «A planning algorithm in a class of discrete event systems». En: DYNA 85(206), pp. 283-293.

Recibido: *03 de junio de 2024*

Aceptado: *02 de octubre de 2024*

Mantilla-Morales, Gisella. *Ingeniero en Electrónica y Telecomuniciones. Profesora activa de la Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE. Línea de investigación: sistemas dinámicos*.
https://orcid.org/0000-0002-0826-7741

Ruiz-Leal, Bladismir. *Licenciado en Matemáticas. Magister en Matemáticas. Doctor en Ciencias. Profesor activo de la Universidad Técnica de Manabí. Ciencias Básicas UTM. Línea de investigación: sistemas dinámicos y teoría ergódica. Correo electrónico:* lruis@yachaytech.edu.ec.
https://orcid.org/0000-0002-7737-3847

Mata-Diaz, Guelvis E. *Licenciado en Matemáticas. Magister Scientiae en Matemáticas. Doctor en Ciencias Aplicadas.*

Profesor Titular activo. Facultad de Ciencias ULA. Departamento de Matemáticas. Línea de investigación: análisis y control en sistemas dinámicos de eventos discretos. Correo electrónico: gematad2017@gmail.com.
https://orcid.org/0000-0001-7147-1422