

Un método para diseño de compensación AW robusta en sistemas lineales a tiempo discreto

An approach for robust AW compensation design in discrete-time linear systems

Ríos-Bolívar, Addison

Departamento de Sistemas de Control, Facultad de Ingeniería, ULA,
Mérida 5101, Venezuela
ilich@ula.ve

Recibido: 28-02-2007

Revisado: 14-01-2008

Resumen

En esta contribución se presenta un método para la síntesis de compensación Anti-Windup (AW) robusta en sistemas de control lineales multivariable a tiempo discreto. El método consiste en considerar la diferencia entre la salida del actuador y la salida del controlador como una señal de perturbación. De esta manera, se consideran índices de desempeño sobre la función de transferencia de esa perturbación a la salida del controlador. Se combina, además, ese índice de desempeño con los correspondientes al funcionamiento de la función de transferencia de las perturbaciones a las salidas controladas, por lo que, de manera simultánea, se diseña la política de control y su compensación. Así, se establecen condiciones de desempeño mezclado en \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_∞ . Por efecto de la compensación robusta, se asegura el desempeño en lazo cerrado, a pesar de cambios en los límites de saturación de los actuadores.

Palabras clave: Compensación anti-windup, sistema a tiempo discreto, control \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_∞ , desigualdades matriciales lineales.

Abstract

In this contribution, a method for robust anti-windup compensation synthesis in multivariable discrete-time linear systems is presented. The approach considers the residual signal between the actuator output and the controller output as one disturbance signal. Then, performance indexes on the transfer function of that disturbance to the controller output are considered, in order to design the compensation gain. The performance indexes are combined with the indexes corresponding to the performance of the transfer function of the perturbations to the controlled output, which allows to design robust controller and anti-windup compensation gain, simultaneously. The method also allows to consider mixed performance indexes (multiobjectives) in \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_∞ , where techniques based on linear matrix inequalities can be used. With this approach, a robust compensation is obtained and the performance in closed loop is guaranteed, in spite of changes in the saturation limits of the actuators.

Key words: Anti-windup compensation, discrete-time systems, \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_∞ control, linear matrix inequalities.

1 Introducción

El objetivo final en el procedimiento de diseño de sistemas de control corresponde a la implantación de los algoritmos resultantes. Esta meta se debe cumplir considerando la complejidad de los sistemas técnicos, como los procesos industriales, que demandan la construcción de sofisticados mecanismos que aseguren un funcionamiento confiable y

un desempeño eficiente.

Las consideraciones de implantación práctica se fundamentan, principalmente, en dos aspectos: las limitaciones físicas de los dispositivos, equipos y sistemas; y la capacidad de los sistemas de control de operar en múltiples ambientes y con diferentes objetivos de desempeño.

Desde el punto de vista de la teoría de control, las limitaciones físicas de los equipos y dispositivos para la im-

plantación de los algoritmos de control se ha formulado como el problema de control acotado, en el cual se encuentra definida el problema de *saturación* de los actuadores que corresponde a la caracterización de los inconvenientes prácticos para la puesta en funcionamiento los sistemas de control (Åström y Rundqwist, 1989; Kothare et al., 1994).

En el caso de operación en múltiples ambientes y con varios objetivos de desempeño, tradicionalmente el problema se resuelve mediante el diseño de distintos controladores para cada situación específica y modo de operación.

Por lo tanto se requiere de la *conmutación* entre controladores para servir cada modo operacional. Los modos de conmutación es la *sustitución* de las acciones de control (entradas a las plantas), considerando que la salida del controlador es reemplazada por otra.

Como consecuencia de las limitaciones físicas (saturación) y de las sustituciones, las entradas efectivas a los procesos serían distintas a las salidas del controlador.

En consecuencia, las salidas del controlador no manejan, en forma apropiada, el funcionamiento operacional de la planta, entonces los estados del controlador serían fuertemente actualizados. Este efecto es llamado *windup*. En términos globales, el *windup* es una inconsistencia entre la entrada de control aplicada al proceso y los estados internos del controlador. El efecto adverso del *windup* es un deterioro significativo del desempeño del sistema controlado, sobre disparos y hasta inestabilidad (Kothare et al., 1994; Morari, 1993).

Una manera de atacar el problema de *windup* es mediante el diseño de una *compensación*, que se denomina *compensación anti-windup* (AW). Para el diseño de la compensación, en una primera etapa se diseña el sistema de control sin tomar en cuenta las restricciones físicas y/o las conmutaciones. En una segunda etapa, se construye algún esquema de compensación con el propósito de minimizar los efectos adversos de las restricciones. En términos globales, esta técnica se denomina problema de transferencia AW sin salto ó *anti-windup bumpless transfer problem* (AWBT) (Kothare et al., 1994).

A los fines de obtener compensadores globales, en (Kothare et al., 1994) se presenta un marco general para el problema de AWBT, el cual está basado en el paradigma de diseñar un controlador lineal que ignore las entradas no lineales e incorpore compensación a objeto de minimizar los efectos adversos del rebote. La ventaja principal de este método es que no se imponen restricciones sobre el diseño del controlador de origen. Sus desventajas están centradas en que los efectos adversos de la saturación no se consideran tanto en el diseño original del controlador y sobre el desempeño en lazo cerrado. Además, no se consideran cambios en los límites de saturación de los actuadores, lo cual, desde el punto de vista de robustez, puede resultar muy inconveniente.

Como se sabe muy bien, una situación típica en un ambiente de control industrial es el cambio en los límites de saturación, ya que los elementos actuadores (válvulas de

control, dispositivos hidráulicos, etc.), sufren deterioros debido al uso intensivo, obsolescencia de partes, degradación de los materiales de construcción, entre otros aspectos. En consecuencia, es necesario diseñar mecanismos de compensación con características de robustez, (Ríos-Bolívar et al., 2005; Wada y Saeki, 2003).

En ese contexto de tomar en consideración la robustez en el diseño de la compensación AWBT, (Mulder et al., 2001) presenta una formulación general del problema de síntesis AWBT multivariable. La compensación resultante se obtiene por minimización de una ganancia pesada en \mathcal{L}_2 , usando desigualdades lineales matriciales, pero los cambios de acción de los actuadores no se consideran.

Por otro lado, (Wada y Saeki, 2003) presenta un método basado en el desempeño \mathcal{L}_2 , donde se obtiene un compensador anti-rebote estático. En este caso, tanto el desempeño nominal como el desempeño robusto se reducen a un problema de autovalores generalizados.

En (Grimm et al., 2004) se estudia un AW aumentado en el caso especial cuando el compensador solo modifica la entrada y, tanto el desempeño como la salida controlada se evalúan en términos de la ganancia \mathcal{L}_2 . Mientras tanto, en (Kapila y Pan, 1999) se analiza el problema de estabilización de sistemas a tiempo discreto bajo saturación no lineal. El marco propuesta se basa en el método de desigualdades matriciales lineales (LMI), a partir del cual se obtiene, de manera directa, índices de estabilidad y desempeño robusto. En (Hu y Lin, 2001a) se presenta un método para estimar el dominio de atracción, en condiciones de saturación, para el caso de sistemas lineales a tiempo discreto. Como resultado, se obtiene una condición simple para el diseño de la compensación.

El problema de rechazo a perturbaciones bajo condiciones de saturación es estudiado en (Hu y Lin, 2001b).

Así, el problema de AW para sistemas lineales a tiempo discreto se formaliza en términos de la norma l_2 , tal como se presenta en (Grimm et al., 2003).

Una conclusión general de todas esas técnicas planteadas es que no se consideran cambios en los límites de saturación de los actuadores.

En (Ríos-Bolívar et al., 2004) se presenta una técnica para compensación AWBT en controladores PID basada en la caracterización de las normas \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_∞ como desigualdades matriciales lineales. La robustez se considera asegurando el desempeño en lazo cerrado a pesar de cambios desconocidos en los límites de saturación de los actuadores.

Un marco general de compensación robusta en sistemas LTI se presenta en (Ríos-Bolívar y Godoy, 2005).

En este trabajo se presenta un método para el diseño simultáneo del controlador de principal y la compensación AW para sistemas lineales a tiempo discreto.

En primer lugar, se establecen los requerimientos de diseño como si el sistema no es afectado por la saturación, por lo que se establecen las especificaciones de desempeño de manera tradicional. A los fines de consi-

derar la saturación, simultáneamente se establece un índice de desempeño que involucra la diferencia entre la salida del actuador y la salida del controlador, una señal que se considera como una *perturbación* en el sentido de funcionamiento original. Así, se pueden considerar índices de desempeño sobre la función de transferencia de esa *perturbación* respecto a la salida del controlador. En ese sentido, se define una característica de robustez al garantizarse, dentro de un contexto local, el funcionamiento en lazo cerrado a pesar de cambios desconocidos en los límites de saturación de los actuadores. Combinando los requerimientos de desempeño del diseño típico del controlador (función de transferencia de la salida controlada respecto a las perturbaciones), con los índices de funcionamiento respecto a la saturación, se establece una mezcla de condiciones de robustez en el marco de las normas $\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_\infty$.

2 Planteamiento del problema

De manera de introducir el problema de compensación AW robusta, considérese el sistema lineal a tiempo discreto siguiente:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_x(k) + B_1 w(k) + B_2 \sigma(u) \\ z(k) &= C_1 x(k) + D_{11} w(k), \\ y(k) &= C_2 x(k), \end{aligned} \tag{1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ son los estados, $w \in \mathbb{R}^r$ son las perturbaciones, $u \in \mathbb{R}^p$ son los controles, $z \in \mathbb{R}^m$ son las salidas controladas, y finalmente, $y \in \mathbb{R}^q$ son las salidas medidas. $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}$ son matrices conocidas de dimensiones apropiadas.

Desde un punto de vista matemático, la saturación del actuador se describe por la función no lineal $\sigma(o)$, misma que esta dada.

$$\sigma(u_i) = \begin{cases} u_{i_{\min}} & \text{si } u(k) < u_{i_{\min}} \\ u(k) & \text{si } u_{i_{\min}} \leq u(k) \leq u_{i_{\max}} \\ u_{i_{\max}} & \text{si } u(k) > u_{i_{\max}}, i = 1, 2, \dots, p \end{cases} \tag{2}$$

Como ya ha sido mencionado, el problema de compensación AW se presenta debido a las limitaciones físicas de los dispositivos encargados de ejecutar la acción de control. Así, aparece el comportamiento no lineal que toma la salida del controlador y aplica un control efectivo sobre el proceso, tal como se muestra en la Fig. 1

Esa señal de control efectivo $\sigma(u)$ corresponde entonces en aplicar la función no lineal sobre la salida del controlador $u(k)$.

Como es típico en el control de procesos, de manera de satisfacer los requerimientos de funcionamiento, es necesario considerar el diseño de controlador dinámico con compensación, el cual se define por:

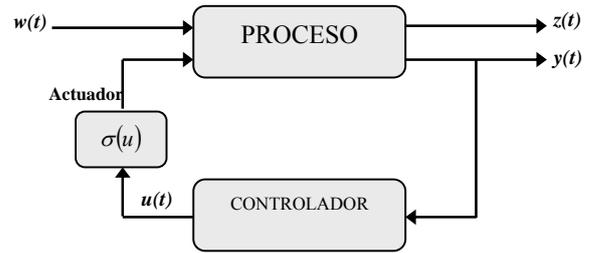


Fig. 1: Sistemas de control con saturación del actuador

$$\begin{aligned} \zeta(k+1) &= \mathbf{A}_c \zeta(k) + \mathbf{B}_c y(k) + \mathbf{E}_c [\sigma(u) - u] \\ u(k) &= \mathbf{C}_c \zeta(k) + \mathbf{D}_c y(k), \end{aligned} \tag{3}$$

donde $\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c, \mathbf{D}_c$ son las matrices dinámicas del controlador, mismas que son parámetros de diseño. \mathbf{E}_c representa la ganancia de compensación, a ser diseñada también.

Cuando el sistema controlado presenta saturación, la señal $\mathcal{G} = \sigma(u) - u$ será distinta de cero, y en ese momento aparecen los efectos adversos del funcionamiento bajo esa condición.

Para el diseño de la compensación, tradicionalmente las matrices dinámicas del controlador $\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c$ y \mathbf{D}_c se diseñan sin considerar la saturación de los actuadores.

En segundo término, el efecto de la saturación sobre el desempeño en lazo cerrado es minimizado por la adecuada selección de la ganancia de compensación \mathbf{E}_c . Así, la compensación toma lugar cuando la señal $\mathcal{G} = \sigma(u) - u$ es diferente de cero, por lo que se añade una realimentación adicional, (ver la Fig. 2), a los fines de hacer nula esa señal, otra vez, actuando sobre la señal de control u , que se lleva al dominio operacional fuera sin saturación.

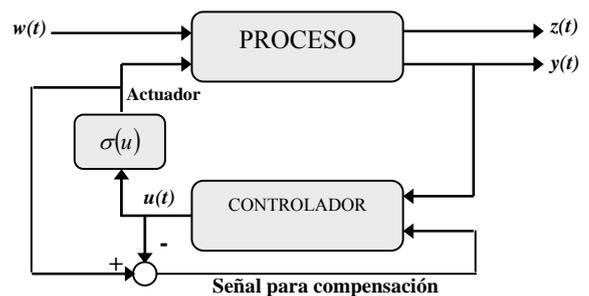


Fig. 2: Sistema de control con saturación y compensación

Por lo tanto, el sistema en lazo cerrado está dado por:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_x(k) + B_1 w(k) + B_2 u(k) + B_2 \mathcal{G}(k) \\ \zeta(k+1) &= \mathbf{B}_c C_2 x(k) + \mathbf{A}_c \zeta(k) + \mathbf{E}_c \mathcal{G}(k) \\ z(k) &= C_1 x(k) + D_{11} w(k) \\ u(k) &= \mathbf{D}_c C_2 x(k) + \mathbf{C}_c \zeta(k), \end{aligned} \tag{4}$$

que, equivalentemente, corresponde a:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A + B_2 \mathbf{D}_c C_2)x(k) + B_2 C_c \zeta(k) + B_1 w(k) + B_2 w(k) + B_2 \zeta(k) \\ \zeta(k+1) &= \mathbf{B}_c C_2 x(k) + \mathbf{A}_c \zeta(k) + \mathbf{E}_c \zeta(k) \\ z(k) &= C_1 x(k) + D_{11} w(k), \\ u(k) &= \mathbf{D}_c C_2 x(k) + \mathbf{C}_c \zeta(k). \end{aligned} \quad (5)$$

El desempeño en lazo cerrado sin saturación se analiza a partir de la función de transferencia de la perturbación w a la salida controlada z . En este caso, sea T_{zw} dicha función de transferencia dada por:

$$T_{zw}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{C}_1 & D_{11} \end{array} \right] = C_1 (sI - A)^{-1} B_1 + D_{11} \quad (6)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} A + B_2 \mathbf{D}_c C_2 & B_2 C_c \\ \mathbf{B}_c C_2 & \mathbf{A}_c \end{pmatrix}, & \mathbf{B}_1 &= \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C}_1 &= (C_1 \quad 0), & D_{11} &= D_{11}. \end{aligned}$$

Problema 1: Por requerimientos de desempeño sin saturación, es necesario diseñar un controlador dinámico (3) tal que:

- El sistema en lazo cerrado (5) sea asintóticamente estable.
- $\|T_{zw}\|_2 < \mu$ o $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, donde los índices de desempeño $\mu > 0$, $\gamma > 0$.

Este es un problema típico del control óptimo robusto (Boyd et al., 1994; Gahinet y Apkarian, 1994).

Cuando se presenta la saturación es necesario conservar propiedades de estabilidad. Ella se garantiza por medio de condiciones de estabilidad local o global de sistemas de entrada acotada. En el caso que se presenta, se asumen condiciones de estabilidad local, misma que se garantiza por medio del diseño de la ganancia de compensación. Así, el problema de síntesis consiste en diseñar \mathbf{E}_c que garantice la efectividad de la compensación bajo alguna condición de estabilidad robusta en sistemas perturbados. La estabilidad en lazo cerrado se satisface, en primer lugar, por la selección apropiada de las matrices dinámicas del controlador. La segunda condición, ligada a la estabilidad de los sistemas de entrada acotada, permite la compensación bajo estabilidad local.

Por otro lado, es necesario considerar aspectos de robustez con relación a la operación de los actuadores. En ese sentido, se debe diseñar la ganancia de compensación a objeto de garantizar la estabilidad en lazo cerrado y minimizar el efecto de la perturbación \mathcal{G} sobre la señal de control u , al momento de presentarse la saturación.

Entonces, el problema de diseño de la ganancia de compensación puede enfocarse a partir de las normas \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ .

Considérese la función de transferencia de la señal de control con respecto a la perturbación \mathcal{G} :

$$T_u(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_2 & D_2 \end{array} \right] = C_2 (sI - A)^{-1} B_2 + D_2 \quad (7)$$

Donde:

$$B_2 = \begin{pmatrix} B_2 \\ \mathbf{E}_c \end{pmatrix}, \quad C_2 = (\mathbf{D}_c C_2 \quad \mathbf{C}_c), \quad D_2 = 0.$$

Problema 2: Dado el sistema dinámico (1), diseñar la ganancia de compensación \mathbf{E}_c para el controlador (3), tal que:

- El sistema en lazo cerrado (5) sea asintóticamente estable.
- El efecto de la señal \mathcal{G} sobre la señal de control u sea mínimo, en algún sentido.

Bajo esta formulación se pueden obtener índices de desempeño robusto con respecto a cambios en los límites de saturación, lo cual es una demanda típica del control de procesos industriales donde los elementos actuadores (válvulas de control, accionadores hidráulicos, motores, etc) se deterioran por el uso intensivo, obsolescencia de partes, degradación de los materiales de construcción, entre otros aspectos. Por lo tanto, es necesario diseñar mecanismos de compensación a los fines de garantizar algunas características de robustez, donde se consideren los cambios en el funcionamiento de los dispositivos actuadores (Ríos-Bolívar et al., 2005; Wada y Saeki, 2003).

En resumen, se han formulado dos problemas: un problema de control óptimo robusto típico y un problema de síntesis de compensación robusta. Ambos problemas se pueden resolver de manera simultánea como un problema de control multiobjetivo:

Problema: Dado el sistema dinámico (1), diseñar el controlador conj compensación (3) tal que:

- El sistema en lazo cerrado (5) sea asintóticamente estable.
- $\|T_{zw}\|_2 < \mu$ o $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, donde los índices de desempeño $\mu > 0$, $\gamma > 0$; **sueto a que.**
- El efecto de la señal \mathcal{G} sobre la señal de control u sea mínimo, en algún sentido.

Bajo esta formulación, los objetivos de diseño pueden ser una mezcla de condiciones de desempeño en \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ , incluyendo el rechazo a perturbaciones, lo cual se pueden describir a partir de un sistema de desigualdades matriciales lineales, tal como ha sido establecido en el diseño de controladores de criterios de funcionamiento múltiples (Scherer et al., 1997).

En este contexto, es posible desarrollar una técnica de diseño sistemática que combine aspectos importantes de síntesis de control realimentado con diseño de compensación AW, tomando ventaja de la formulación de múltiples objetivos.

3 Diseño del controlador con compensación

En esta sección se presenta el método de diseño de compensación AW a los fines de manejar las restricciones que impone la saturación de los actuadores, tal como ha sido formulado en el Problema 2. Por lo tanto, se desea diseñar el controlador con compensación (3) de manera que el sistema en lazo cerrado (5) sea asintóticamente estable y $\|T_u\|_2^2 < \mu$ ó $\|T_{u,g}\|_\infty < \gamma$.

3.1 Formulación en \mathcal{H}_2

En este caso, se quiere diseñar el controlador (3) tal que $\|T_u\|_2^2 < \mu$, para todo $\mu > 0$, mismo que satisface requerimientos de compensación AW.

El siguiente Lema es un resultado muy conocido que caracteriza la norma \mathcal{H}_2 como una restricción LMI (Scherer et al., 1997).

Lema 3.1 *Considérese el sistema dinámico definido por $T_u(s)$. La desigualdad $\|T_u\|_2^2 < \mu$ se cumple si, y solamente si, $D_2 = 0$ existen matrices simétricas X, W tal que $tr(W) < \mu$ y*

$$\begin{bmatrix} X & AX & B_2 \\ (o)^T & X & 0 \\ (o)^T & (o)^T & I \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} W & C_2 X \\ (o)^T & X \end{bmatrix} > 0, \quad (8)$$

es factible.

Proposición 3.1 *Considérese el sistema definido por (1) y el controlador con compensación dado por (3). El sistema controlado es asintóticamente estable con compensación robusta, en el sentido que $\|T_u\|_2^2 < \mu$, si, y solo si, existen matrices de orden n y simétricas $X > 0$ y $Y > 0$; las matrices $Q, L \in \mathcal{R}^{n \times n}$; las matrices $F \in \mathcal{R}^{n \times p}$, $N \in \mathcal{R}^{p \times q}$, $M \in \mathcal{R}^{m \times p}$ y la matriz simétrica $W \in \mathcal{R}^{m \times m}$ tal que las siguientes LMIs son factibles:*

$$\begin{bmatrix} X & I & AX + B_2 L & A + B_2 N C_2 & B_2 \\ (o)^T & Y & Q & YA + FC_2 & YB_2 + M \\ (o)^T & (o)^T & X & I & 0 \\ (o)^T & (o)^T & (o)^T & Y & 0 \\ (o)^T & (o)^T & (o)^T & (o)^T & I \end{bmatrix} > 0, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} W & L & N C_2 \\ (o)^T & X & I \\ (o)^T & (o)^T & Y \end{bmatrix} > 0, \quad tr[W] < \mu, \quad D_2 = 0, \quad (10)$$

El controlador se obtiene de:

$$\begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^{-1} & -V^{-1} Y B_2 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q - Y A X & F \\ L & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ -C_2 X U^{-1} & I \end{pmatrix}$$

La ganancia matricial de compensación E_c está dada por:

$$E_c = V^{-1} M;$$

donde V y U son matrices no singulares que satisfacen:

$$YX + VU = I$$

Demstración

La prueba se basa en el procedimiento de linealización por medio de transformación congruente y cambios de variables. Por razones de espacio, el procedimiento se presenta de manera general. Sean las transformaciones matriciales

$$T = \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & V^T \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X & U^T \\ U & Y \end{pmatrix}, \quad X^{-1} = \begin{pmatrix} Y & V \\ V^T & X \end{pmatrix}.$$

La primera desigualdad en (9) se multiplica por la derecha por $\mathcal{T} := \text{diag}[T, T, I]$ y por la izquierda por \mathcal{T}^T . La segunda desigualdad en (9) se multiplica por la derecha por $\mathcal{J} := \text{diag}[I, T]$, y por la izquierda por \mathcal{J}^T . De allí surgen expresiones como: $T^T X T, T^T A X T, T^T B$, y $C X T$, las cuales permiten la linealización de las desigualdades a través del cambio de variables

$$\begin{pmatrix} Q & F \\ L & N \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} V & Y \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X & 0 \end{pmatrix}.$$

Estas relaciones definen las matrices dinámicas del controlador, que se derivan por solución de esa ecuación matricial. Mientras que para la ganancia de compensación se utiliza la relación

$$M = V E_c;$$

Esos cambios de variables y las transformaciones son las que conllevan a la linealización de las desigualdades, tal como se expresan en (10).

Al considerar el efecto de la saturación sobre la señal de control, esta formulación garantiza la estabilidad, en un contexto local, bajo la presencia de la no linealidad de los actuadores.

3.1 Formulación en \mathcal{H}_∞

El interés aquí es diseñar el controlador (3) tal que $\|T_u\|_\infty < \gamma$, para todo $\gamma > 0$. Se sabe que la norma \mathcal{H}_2 tiene una caracterización LMI de acuerdo al siguiente Lema (Scherer et al., 1997):

Lema 3.2. *Considérese el sistema definido por $T_{u,g}(s)$.*

La norma $\|T_{u,g}\|_\infty^2 < \gamma$ es cierta si, y solo si, existe una matriz simétrica X , tal que

$$\begin{bmatrix} X & AX & B_2 & 0 \\ (o)^T & X & 0 & XC_2^T \\ (o)^T & (o)^T & I & D_2^T \\ (o)^T & (o)^T & (o)^T & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \tag{11}$$

es factible.

Proposición 3.2 Considérese el sistema dado por (1) y el controlador con compensación definido por (3). El sistema controlado es asintóticamente estable, en un sentido local, con compensación robusta, toda vez que $\|T_{u,g}\|_\infty < \gamma$, si y solo si, existen matrices de orden n simétricas $X > 0$ y $Y > 0$; la matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$; las matrices $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $N \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$; tal que la siguiente LMI sea satisfecha:

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + B_2L + L^TB_2^T & A + B_2NC_2 + Q^T & B_2 & L^T \\ (o)^T & YA + A^TY + FC_2 + C_2^TF^T & YB_2 + M & C_2^TN^T \\ (o)^T & (o)^T & -\gamma I & 0 \\ (o)^T & (o)^T & (o)^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0.$$

El controlador se obtiene a partir de:

$$\begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^{-1} & -V^{-1}YB_2 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q - YAX & F \\ L & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ -C_2XU^{-1} & I \end{pmatrix}$$

La ganancia matricial de compensación E_c está dada por

$$E_c = V^{-1}M;$$

donde V y U son matrices no singulares que satisfacen $YX + VU = I$

Demostración

De manera similar al caso H_2 , la prueba se fundamenta en el procedimiento de linealización de las desigualdades

matriciales mediante transformación congruente y cambios de variables. Esto es, las desigualdades lineales se obtienen sustituyendo las matrices de lazo cerrado. Se aplica la transformación congruente basada, en este caso, en la matriz de transformación $\mathcal{T} := \text{diag}[T, T, I, I]$. La desigualdad en (11) se multiplica por la derecha por \mathcal{T} y por la izquierda por \mathcal{T}^T . La linealidad se recupera usando los cambios de variables descritos en la demostración anterior. Las expresiones del controlador, y de la ganancia de compensación, se obtienen de las expresiones de las variables, invirtiendo el cambio de variables.

Como se sabe, la formulación bajo la norma \mathcal{H}_∞ corresponde a la ganancia L_2 de la salida controlador con respecto a la salida del actuador por efecto de la saturación, lo cual es un aspecto importante considerar para definir algún índice de desempeño robusto.

3.3 Diseño con criterios multiobjetivos en $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

En este caso, se consideran condiciones de desempeño simultáneas (una mezcla), sobre las funciones de transferencias $T_{zw}(s)$ y $T_u(s)$. A partir de los resultados previos, es posible diseñar el controlador con compensación bajo requerimientos de típicos de control óptimo robusto y de cambios en los límites de acción de los actuadores. Por ejemplo, los siguientes objetivos pueden ser formulados:

1. $\|T_{zw}\|_\infty < \mu$ sujeto a $\|T_u\|_2 < \gamma$.
2. $\|T_{zw}\|_2 < \mu$ sujeto a $\|T_u\|_\infty < \gamma$.

Como se puede notar, distintas combinaciones pueden ser tomadas en cuenta. Así, de manera de presentar un estudio ejemplarizante, a continuación se presenta el caso particular del problema diseño multiobjetivo $\mathcal{H}_\infty - \mathcal{H}_2$. Por lo tanto, el caso del diseño que considera una mezcla de diferentes índices en $\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_\infty$ puede ser tratado de la misma manera.

Corolario 1 *El sistema definido por (1) es estabilizable por el controlador por realimentación dinámica de la salida con compensación (3) tal que $\|T_{zw}\|_\infty < \mu$ y $\|T_u\|_2 < \gamma$, si y solo si, existen matrices de orden n simétricas $X > 0$ y $Y > 0$; la matriz $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$; las matrices $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $N \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$; y la matriz simétrica $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ que satisfacen las siguientes LMIs:*

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + B_2L + L^TB_2^T & A + B_2NC_2 + Q^T & B_1 & XC_1^T \\ (o)^T & YA + A^TY + FC_2 + C_2^TF^T & YB_1 & C_1^T \\ (o)^T & (o)^T & -\mu I & D_{11}^T \\ (o)^T & (o)^T & (o)^T & -\mu I \end{bmatrix} < 0.$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}_2\mathbf{L} + \mathbf{L}^T\mathbf{B}_2^T & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{N}\mathbf{C}_2 + \mathbf{Q}^T & \mathbf{B}_2 \\ (o)^T & \mathbf{Y}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{Y} + \mathbf{F}\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2^T\mathbf{F}^T & \mathbf{Y}\mathbf{B}_2 + \mathbf{M} \\ (o)^T & (o)^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{L} & \mathbf{N}\mathbf{C}_2 \\ (o)^T & \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ (o)^T & (o)^T & \mathbf{Y} \end{bmatrix} > 0,$$

$tr(\mathbf{W}) < \gamma.$

El controlador se obtiene a partir de:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{-1} & -\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{B}_2 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q} - \mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{X} & \mathbf{F} \\ \mathbf{L} & \mathbf{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{-1} & 0 \\ -\mathbf{C}_2\mathbf{X}\mathbf{U}^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

La ganancia matricial de compensación \mathbf{E}_c está dada por:

$\mathbf{E}_c = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{M};$ (12)

donde \mathbf{V} y \mathbf{U} son matrices que satisfacen $\mathbf{Y}\mathbf{X} + \mathbf{V}\mathbf{U} = \mathbf{I}.$

Este resultado muestra que, de manera fácil, se puede definir la formulación apropiada bajo LMI para cada especificación particular. Por lo tanto, el problema de diseño pueden involucrar alguna restricción de desempeño sobre la señal de salida controlada y alguna otra restricción sobre la señal de control por efecto de la saturación. Entonces, es posible encontrar las LMIs de síntesis correspondientes formulado como un problema multiobjetivo, y se resuelven las LMIs numéricamente para obtener el controlador compensado.

4 Ejemplo numérico ilustrativo

Considérese el sistema lineal a tiempo discreto siguiente:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0,9048 & 0 \\ 0 & 0,9048 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0,4762 & 0,3810 \\ 0,3810 & 0,2857 \end{pmatrix} \sigma(u)$$

$$z(k) = \begin{pmatrix} 0,9524 & 0 \\ 0 & 0,9524 \end{pmatrix} x(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 0,9524 & 0 \\ 0 & 0,9524 \end{pmatrix} x(k)$$

Para este ejemplo se considera que las señales de control acotada son $u_1 \in [-2,2]$ y $u_2 \in [-2,2].$

Para regulación de la salida, se diseña un controlador dinámico sin tomar en cuenta la saturación, mismo que está dado por

$$\zeta(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \zeta(k) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e(k)$$

$$u(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \zeta(k) + \begin{pmatrix} 10,5 & 0 \\ 0 & -12,5 \end{pmatrix} e(k),$$

donde $e(k) = r(k) - y(k).$ Además, se consideran las señales de referencia $r1(k) = 0;6$ y $r2(k) = 0;4.$ La Fig. 3 muestra los resultados de la simulación bajo dos condiciones de operación: (1) Sin saturación del actuador. (2)

Con saturación pero sin compensación. Se puede observar que el comportamiento temporal es fuertemente afectado por la saturación.

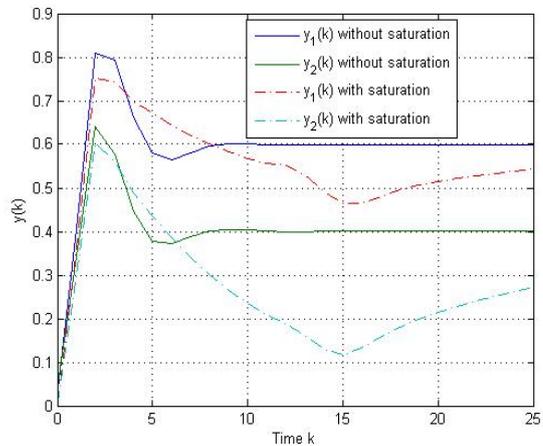


Fig. 3: Salidas controladas sin saturación y sin compensación

A los fines de mejorar el comportamiento temporal, se recurre al diseño de la ganancia de compensación sin considerar cambios en los límites de acción de los actuadores, tal como se presenta en (Cao y Lin, 2003). Esa ganancia de compensación corresponde a:

$\mathbf{E}_c = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 1,3 \end{pmatrix}.$

De manera ilustrativa, la Fig. 4 muestra los resultados de la simulación. Se puede observar que se mejora el comportamiento temporal ya que las salidas controladas con compensación son próximas al comportamiento sin saturación. Esto comprueba el efecto de la compensación.

Por el contrario, si los límites de saturación cambian, por ejemplo si ahora $u_1 \in [-1,5,1,5]$ y $u_2 \in [-2,2],$ entonces ese controlador con compensación simple no puede regular las salidas, tal como es mostrado en la Fig. 5. Por lo tanto, es necesario un diseño robusto de la ganancia de compensación.

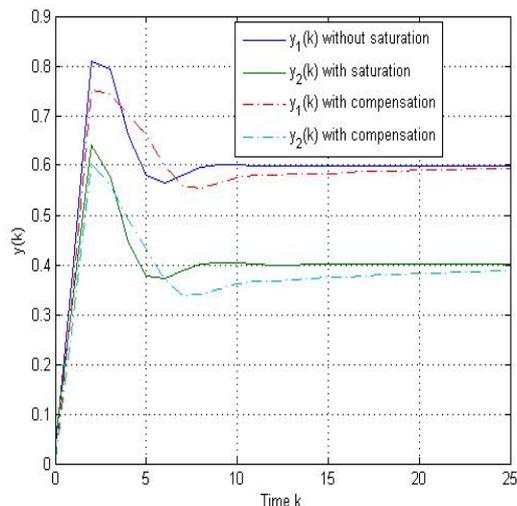


Fig. 4: Salidas reguladas sin saturación y con compensación simple

Para obtener una ganancia de compensación robusta se aplican los resultados mostrados en bajo la Proposición 3.2. Las LMIs para el caso de $\|T_u\|_\infty < \gamma$ son resueltas por medio del LMI toolbox de MatLab©. Los resultados obtenidos son los siguientes:

$$\gamma = 0,1189 \quad \mathbf{E}_c = \begin{pmatrix} 0,4762 & 0,3810 \\ 0,3810 & 0,2857 \end{pmatrix}$$

De manera de evaluar la robustez con respecto a cambios en los límites de saturación, la Fig. 6 muestra los resultados para las salidas reguladas en dos casos diferentes: sin saturación y con saturación y con compensación robusta.

Tal como se puede observar en la Fig. 6, la compensación robusta garantiza el desempeño del sistema en lazo cerrado, a pesar de cambios en los límites de saturación. El comportamiento temporal para el caso sin saturación y con compensación robusta son similares.

Mientras que la situación es totalmente distinta cuando no se tiene la compensación robusta. Por lo tanto, estos resultados justifican el requerimiento de considerar características de robustez en el diseño de la ganancia de compensación, tal como ha sido presentado.

5 Conclusiones

Las contribuciones principales de este trabajo ha sido la formulación de una técnica para el diseño de compensación *anti-windup* robusta en controladores multivariables para sistemas lineales a tiempo discreto. El método se basa en tomar en cuenta que la diferencia entre la salida del actuador y la salida del controlador puede representar una *perturbación* que afecta esa salida del controlador. Por lo tanto, se han formulado índices de desempeño sobre la función de transferencia por la salida del controlador respecto a

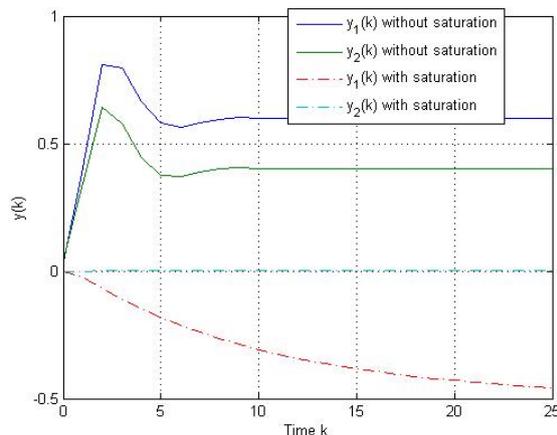


Fig. 5: Salidas reguladas sin saturación y con compensación bajo cambios en límites

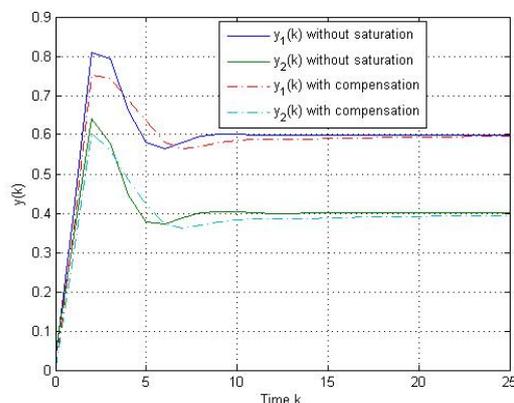


Fig. 6: Salidas reguladas con compensación robusta

esa *perturbación*, a los fines de obtener una ganancia de compensación con características de robustez. Además, se han combinado esos índices de funcionamiento con requerimientos de desempeño sobre la función de transferencia de las perturbaciones propias a las salidas controladas, con lo cual se obtiene una mezcla de condiciones de desempeño óptimo robusto definidas bajo las normas \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ . Esto último ha permitido el diseño simultáneo del controlador dinámico y la ganancia de compensación robusta. Las normas han sido caracterizadas como desigualdades matriciales lineales (LMI) para obtener soluciones numéricas por medio de algoritmos especializados. El desempeño del sistema en lazo cerrado ha sido garantizado, a pesar de cambios desconocidos en los límites de acción de los actuadores. Las características de estabilidad y de desempeño robusto han sido definidas a partir de la formulación del problema en el marco de las normas \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ , lo cual garantiza condiciones de estabilidad local.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el FONACIT bajo

el proyecto N° 2005000170, y el CDCHT de la Universidad de Los Andes, a través del proyecto N° I-795-04-02-A, por lo que gratamente se reconocen estos soportes económicos.

Referencias

- Åström KJ, y Rundqwist L, 1989, Integrator wind-up y how to avoid it, pp. 1693-1698.
- Boyd S, Ghaoui LE, Feron E, y Balakrishnan, V, (1994), Linear matrix inequalities in system and control theory, SIAM.
- Cao YY y Lin Z, 2003, Stability analysis of discrete-time systems with actuator saturation by a saturation-dependent Lyapunov function, *Automática* 39: 1235-1241.
- Gahinet P, y Apkarian P, 1994, A linear matrix inequality approach to H_∞ control, *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* 4(4): 421-448.
- Grimm G, Teel A, y Zaccarian L, 2003, The ℓ_2 anti-windup problem for discrete-time linear systems: definition and solution, in IEEE (ed.), Proc. American Control Conference, IEEE, Denver, Colorado USA, pp. 5329-5334.
- Grimm G, Teel, A, y Zaccarian, L, 2004, Linear LMI-based external anti-windup augmentation for stable linear systems *Automática* 40: 1987-1996.
- Hu, T, y Lin Z, 2001a, Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation, in IEEE (ed.), Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision & Control, IEEE, Orlando, Florida USA, pp. 4675-4680.
- Hu T, y Lin Z, 2001b, Disturbance rejection with saturation actuators for discrete-time linear systems, in IEEE (ed.), Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision & Control, IEEE, Orlando, Florida, USA, pp. 1723-1728.
- Kapila V, y Pan H, (1999), Control of discrete-time systems with actuator nonlinearities: An LMI approach, in IEEE (ed.), Proceedings of the 38th Conference on Decision & Control, IEEE, Phoenix, Arizona USA, pp. 1419-1420.
- Kothare MV, Campo PJ, Morari M y Nett CN, 1994, A unified framework for the study of anti-windup designs, *Automatica* 30(12): 1869-1883.
- Morari M, 1993, Some control problems in the process industries. Essays on control: Perspectives in theory and applications, Birhauser.
- Mulder E, Kothare M, y Morari M, 2001, Multi-variable anti-windup controller synthesis using linear matrix inequalities, *Automática* 37: 1407-1416.
- Ríos-Bolívar A, y Godoy S, 2005, Multivariable anti-windup controller design using H_2 - H_∞ multiobjectives, Proc. of the first ICGST Int. Conf. on Automatic Control and Systems Engineering (ACSE-05), Vol. 1, Cairo, Egypt, pp. 28-34.
- Ríos-Bolívar A, Mousalli-Kayat G, y Rivas-Echeverría F, 2004, Implementation of AWBT compensation using ANN, *WSEAS Transaction on Systems* 3: 402-407.
- Ríos-Bolívar A, Rivas F, y Garcia G, 2005, Robust anti-windup compensation for PID controllers, 7th WSEAS Int. Conf. on Automatic Control, Modelling and Simulation, ACMOS-05, Prague – Czech, Republic, pp. 242-247.
- Scherer C, Gahinet P, y Chilali M, 1997, Multi-objective output-feedback control via LMI optimization, *IEEE Trans. Automatic Control* 42(7), pp. 896-911.
- Wada N, y Saeki M, 2003, Design of a static anti-windup compensator that optimizes L_2 performance: An LMI based approach, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics & Automation, Taipei - Taiwan, pp. 2628-2633.

