

# Entonación de controladores industriales tipo PID

## Tuning industrial PID controllers

W. Colmenares\*, E. Mata, S. Revollar, E. Granado y O. Pérez  
Universidad Simón Bolívar, Departamento de Procesos y Sistemas  
Apartado 89000, Caracas 1080 - Venezuela  
\*williamc@usb.ve

### Resumen

En este trabajo se presenta un conjunto de estrategias de entonación y ajuste de controladores industriales tipo PID (proporcional, integral, derivativo) y se comparan entre ellas. Una de las estrategias que se presentan, está basada en la formulación del cálculo del PID como un problema de optimización convexa basado en desigualdades matriciales lineales (LMIs). Esta estrategia novedosa, permite incorporar condiciones de desempeño tales como: estabilidad, ubicación de polos y rechazo de perturbaciones. Con la estrategia basada en LMIs, se obtienen controladores con prestaciones iguales o mejores que otras más conocidas y de amplio uso, como aquellas basadas en modelo interno.

**Palabras claves:** Entonación, controladores industriales PID, desigualdades lineales matriciales LMIs.

### Abstract

In this work a new approach for tuning industrial PID controller is presented. The approach is based on a convex optimization problem based on linear matrix inequalities. Performance requirements such as stability, pole location and disturbance rejection can be easily incorporated. The algorithm proposed is compared to other well known methods such as internal model and heuristic strategies, always with similar or better results.

**Key words:** Tuning, industrial PID controllers, linear matrix inequalities.

### 1 Introducción

El controlador proporcional, integral, derivativo (PID) es, sin lugar a dudas, el regulador de más amplio uso en lazos de control de una entrada y una salida: sistemas monovariados (Astrom, 2002). Aparte de su versatilidad y amplio espectro de uso que va desde aplicaciones en procesos químicos hasta la aviación y aeronáutica (Goodwin y col, 2001), este controlador incorpora elementos atractivos en el lazo de control como son: robustez, eliminación de error y perturbación estacionaria. El ajuste de sus tres parámetros sin embargo, no es transparente y ha sido objeto numerosos estudios (Ziegler y. Nichols, 1942; Astrom y Hagglund, 1995; Rivera y col, 1986; Skogestad, 2003; Ho y col, 1995). En este trabajo se repasan algunas de las estrategias más utilizadas para la entonación de estos controladores industriales y se propone un método sistemático de ajuste de PIDs basado en un problema de optimización formulado con Desigualdades Matriciales Lineales (LMIs).

El método propuesto realiza una búsqueda de los parámetros del PID, basándose en una condición de ubicación

de polos en semiplanos y por ende, lleva implícitas dos condiciones de desempeño, que son: estabilidad y rapidez de respuesta. En vista de que cualquier mejora en la entonación de estos controladores tendrá un gran significado práctico, se ha decidido colocar en este trabajo no sólo los ajustes de PIDs desarrollados, sino también los propuestos por otros autores (Skogestad, 2003; Ziegler y. Nichols, 1942; Ho y col, 1995) comparándolos.

En este trabajo, se considera un lazo de control como el que se muestra en la Fig.1.

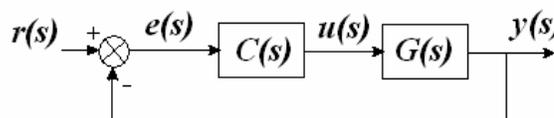


Fig. 1. Lazo cerrado de control

La entrada  $r(t)$  representa el valor deseado o consigna, la salida medible  $y(t)$ , la señal de control  $u(t)$  y el error  $e(t)$  conforman las otras variables del lazo mostrado.  $r(s)$ ,  $y(s)$ ,  $u(s)$ ,  $e(t)$  son las transformadas de Laplace de esas señales.

$G(s)$  y  $C(s)$  representan respectivamente, las funciones de transferencia del sistema y del controlador.

## 2 Los algoritmos PID

En general se habla de controladores PID, porque cada controlador tiene una componente proporcional, una integral y una derivativa, pero su estructura puede variar. Las expresiones más comunes son:

- PID paralelo. En términos de la expresión temporal.

$$u(t) = K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (1)$$

donde  $e(t)$  es la señal de error (ver Fig. 1).

- PID Interactivo. En términos de la función de transferencia.

$$u(s) \equiv \bar{K}_p \left( 1 + \frac{1}{\bar{T}_i s} \right) (1 + \bar{T}_d s) e(s) \quad (2)$$

donde  $u(s)$  y  $e(s)$  son las transformadas de Laplace del control y el error  $u(t)$  y  $e(t)$ .

Las constantes  $K_p$ ,  $T_i$  y  $T_d$  (y  $\bar{K}_p$ ,  $\bar{T}_i$  y  $\bar{T}_d$ ) representan los parámetros de ajuste –o entonación– del controlador. Es posible pasar de la forma paralela a la interactiva siempre que el polinomio:  $T_i T_d s^2 + T_i s + 1$ , tenga raíces reales (Dormido y Morilla, 1995), el caso contrario siempre es posible.

De igual forma, se pueden encontrar ligeras variaciones sobre las estructuras antes mencionadas para resolver problemas específicos como saturación, evitar que cambios en la consigna afecten sensiblemente al controlador, entre otros (Astrom, 2002).

Para el cálculo de los parámetros del PID mediante LMIs, se considera la forma paralela o ideal definida por la Ec. (1), en el entendido de que la mayoría de los controladores industriales aceptan esta estructura y que si no fuese el caso, en general se puede pasar de una forma a la otra.

## 3 PID vía LMIs iterativas

En esta sección se desarrolla una estrategia de cálculo de los parámetros  $K_p$ ,  $T_i$  y  $T_d$  basada en LMIs siguiendo la estrategia propuesta por Cao y col. (1998). Para ello considérese el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3)$$

al que se controla con un PID paralelo como el descrito por la Ec. (1). El vector  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  representa los estados,  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$  el control,  $y(t) \in \mathfrak{R}^p$  la salida medible. A,B,C son ma-

trices constantes de dimensiones adecuadas que representan la dinámica del sistema. Asumiendo que se desea regular (mantener la salida en cero),  $e(t) = -y(t)$ . Sean:

$$K_i = \frac{K_p}{T_i}; \quad \text{y} \quad K_d = K_p T_d.$$

De las Ecs. (1) y (3) es fácil deducir que:

$$\begin{aligned} u(t) = & -(1 + K_d CB)^{-1} K_p y(t) \dots \\ & -(1 + K_d CB)^{-1} K_i \int y(t) dt \dots \\ & -(1 + K_d CB)^{-1} K_d CAx(t) \end{aligned} \quad (4)$$

De modo que definiendo un nuevo vector de estados de la forma:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \int y(t) dt \end{pmatrix}$$

y un nuevo vector de salida:

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \int y(t) dt \\ CAx(t) \end{pmatrix}$$

el problema de encontrar un controlador PID del tipo definido por la Ec. 1 para el sistema determinado por las Ecs. 3, es equivalente a encontrar una realimentación estática de la salida para el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + Bu(t) \\ \psi(t) &= CX(t) \\ u(t) &= -K\psi(t) \end{aligned} \quad (5)$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \\ CA & 0 \end{pmatrix}$$

y  $K = (K_1, K_2, K_3)$  donde:

$$\begin{aligned} K_1 &= (1 + K_d CB)^{-1} K_p \\ K_2 &= (1 + K_d CB)^{-1} K_i \\ K_3 &= (1 + K_d CB)^{-1} K_d \end{aligned} \quad (6)$$

El sistema de Ecs. 5 es estable si existen: una matriz P

definida positiva y una ganancia  $K$ , tal que:

$$(A + BK)P + P(A + BK)^T < 0 \quad (7)$$

Para poder desarrollar un algoritmo de búsqueda a partir de la condición definida por la Ec. 7 de Lyapunov, se incluye una variable escalar adicional  $\alpha$  que permite la formulación de un problema convexo que siempre tiene solución.

El algoritmo es formulado en la sub sección siguiente.

### 3.1. El algoritmo

El algoritmo basado en desigualdades matriciales lineales según Granado y col. es el siguiente:

- Paso 0: determine una matriz de Lyapunov candidato ( $P_0$ ) de la expresión:

$$(A + BK_{-1})P_0 + P_0(A + BK_{-1})^T < 0; \quad (8)$$

$$P_0 > 0$$

y haga  $i = 0$ .

- Paso 1: Dado  $P_i$ , determine  $K_i$  y  $\alpha^*$  de la forma:

$$\alpha^* = \min \alpha \quad (9)$$

sujeto a:

$$(A + BK_i C)P_i + P_i(A + BK_i C)^T - \alpha P_i < 0; \quad (10)$$

$$P_i > 0$$

si  $\alpha \leq 0$  se ha encontrado una ganancia  $K_i$  que estabiliza al sistema, sino, vaya al paso 2.

- Paso 2: Dado  $K_i$  y un borde superior  $\alpha^*$  que es el valor de  $\alpha$  obtenido en el paso 1, calcule  $P_{i+1}$  y un nuevo  $\alpha$  óptimo ( $\hat{\alpha}$ ), partir de:

$$\hat{\alpha} = \min \alpha \quad (11)$$

sujeto a:

$$(A + BK_i C)P_{i+1} + P_{i+1}(A + BK_i C)^T - \alpha P_{i+1} < 0; \quad (12)$$

$$P_{i+1} > 0$$

Si  $\hat{\alpha} \leq 0$ , entonces  $K_i$  es una ganancia estabilizante y sino haga  $i = i + 1$  y vaya al paso 1.

Algunos comentarios a propósito del algoritmo.

**Comentario 1** El algoritmo propuesto está basado en el hecho de que la condición de Lyapunov que asegura la estabilidad para el sistema con realimentación estática de la salida (Ec. 7), es bilineal en las incógnitas  $K$  y  $P$ , y por ende cuando una se fija, lo que resulta es una desigualdad

matricial lineal (LMI) en la otra variable y en consecuencia, un problema convexo.

**Comentario 2** En el Paso 0, lo que hacemos es suministrar al algoritmo un punto de arranque, a partir de la condición de estabilidad con realimentación de los estados, que es una LMI en  $P$  y  $R (= K_{-1} P)$ . Si no existe tal matriz  $P$  que asegure estabilidad con realimentación de estados, tampoco existirá un PID que haga el trabajo. Observe, que en el paso 0 simplemente damos un punto de inicio a partir de una condición necesaria. Se ha podido arrancar desde otro punto, e.g., desde la matriz  $P$  asociada a un PID ajustado por Ziegler y Nichols que sabemos estabiliza al sistema original.

**Comentario 3** En el paso 1, conocida una matriz  $P_i$ , se inicia la búsqueda de una ganancia  $K_i$  que pudiera estabilizar al sistema. Ella ( $K_i$ ) será una ganancia estabilizante, si la solución del problema (convexo) de optimización que se formula en el paso 1, termina con un valor de  $\alpha^* \leq 0$ . Observe que el problema en el paso 1 es una LMI en las incógnitas ( $K_i, \alpha$ ).

**Comentario 4** En el paso 2, conocida una ganancia  $K_i$ , lo que se busca es verificar si ella es, en efecto, una ganancia estabilizante, lo que se certifica si la condición (Ec. 12) es satisfecha, o lo que es lo mismo, se obtiene una matriz  $P_{i+1}$ . Observe igualmente que la condición (Ec. 12) es biconvexa en  $\alpha$  y  $P_{i+1}$ ; sin embargo, siendo  $\alpha$  un escalar y conociendo un límite superior ( $\alpha^*$ ) es fácil obtener ese mínimo de  $\alpha$  porque (siendo escalar) sólo tiene una forma de descenso, luego en el paso 2 lo que se hace es fijar el  $\alpha$  en un valor, resolver la LMI para  $P_{i+1}$  y si tiene solución se hace  $\alpha$  más pequeño y si no, se vuelve al paso 1.

**Comentario 5** La satisfacción de la condición (Ec. 10) ó de la (Ec. 12) no sólo asegura una ganancia estabilizante sino que además da una medida de calidad del controlador obtenido ya que su satisfacción garantiza que los polos del sistema a lazo cerrado están ubicados a la izquierda de  $\alpha/2$  (Scherer y col, 1997).

**Comentario 6** En el paso 2, no se requiere calcular el mínimo de  $\alpha$ , bastaría verificar que con  $\alpha = 0$  se satisface la Ec. 12, lo que certificaría la estabilidad. Se ha incluido el mínimo, sólo para determinar la bondad del controlador medido como lo descrito en el comentario anterior. De hecho, en algunas circunstancias y para ubicar un mejor PID y evitar los problemas numéricos no se vuelve al Paso 1 con la  $P_{i+1}$  asociada al mínimo sino más bien con una menos extrema.

**Comentario 7** La variable escalar  $\alpha$  asegura que los problemas formulados en los pasos 1 y 2, siempre tendrán solución. Ello no asegura sin embargo, que siempre se encontrará un PID estabilizante. El algoritmo falla en encontrar un PID si  $\hat{\alpha} \geq 0$  y  $|\alpha^* - \hat{\alpha}| \leq \varepsilon$ , con  $\varepsilon$  algún valor de convergencia determinado. El éxito del algoritmo está garantizado porque si no existe un controlador PID, el algoritmo, tal como formulado es decreciente y tiene una cota

inferior estrictamente positiva, lo que asegura convergencia. En el caso de existencia de un controlador, basta con alcanzar un valor de  $\alpha$  negativo sin importar si se ha alcanzado un valor de convergencia o no.

**Comentario 8** Por último, este algoritmo puede igualmente ser aplicado para el cálculo de controladores PI de sistemas continuos y discretos, para sistemas multivariables y para sistemas con incertidumbre poliédrica o acotada en norma en las matrices  $A$  y  $C$  del sistema original (para las definiciones de las incertidumbres véase Petersen (1987) y Bernussou (1987) y para las extensiones referidas Granado y col. (2003).

#### 4 Otros algoritmos de entonación de PID's

En esta sección se presentan otras estrategias de entonación de controladores PID. Ello para reforzar el aspecto didáctico de este trabajo, permitiendo al lector encontrar diferentes enfoques al ajuste de controladores y servir de guía y orientación para la entonación de controladores. Los algoritmos presentados son, en nuestra opinión, los de uso más común en entornos industriales.

##### 4.1. Ajustes heurísticos

Estos son quizás los métodos de entonación y ajuste más conocidos. Ello se debe a la facilidad de aplicación –simplemente tomar unos valores de una tabla–, y a su amplia difusión.

Los ajustes están asociados a una determinada prestación (desempeño) del lazo cerrado, para el que se ha supuesto que el sistema a controlar sea de primer orden más retardo y cuya función de transferencia es de la forma:

$$G(s) = \frac{K e^{\tau_d s}}{\tau s + 1} \tag{13}$$

donde los parámetros  $K$ ,  $\tau_d$  y  $\tau$  que representan respectivamente, la ganancia, el retardo y la constante de tiempo del sistema, se suponen conocidos. Las reglas de entonación están basadas en numerosos ensayos (heurísticas) sobre sistemas piloto.

Sin duda, que las reglas de ajuste más conocidas son las de Ziegler y Nichols. Ellas están basadas en lograr una relación de 0,25 entre el valor del segundo y el primer pico positivo de la respuesta temporal del sistema a una entrada escalón. Estas técnicas son conocidas como de: "Quarter Decay Ratio". Adicionalmente, a mediados de los años 80s, surgen reglas de ajuste basados en la minimización de alguna medida del error, a saber:

- La integral del error  $e(t)$  al cuadrado o ISE

$$\int e^2(t)dt$$

- La integral del valor absoluto del error o IAE

$$\int |e(t)|dt$$

- La integral del valor absoluto del error por el tiempo o ITAE

$$\int t |e(t)|dt$$

- La integral del cuadrado del error por el tiempo o ITSE

$$\int t e^2(t)dt$$

A continuación se presentan algunas de las reglas de entonación para controladores PID del tipo interactivo (Ec. 2). En la lista sólo se presentan modos de ajuste al controlador para cambios en la carga (perturbación que entra de la misma forma que el control). La lista no es en modo alguno, agotadora y en Colmenares (1999) se puede encontrar una más detallada.

Antes de presentar las fórmulas de entonación, se define la constante de tiempo normalizada (TN) para un sistema de primer orden como el que se muestra en la Ec. 13:

$$T_N = \frac{\tau_d}{\tau}$$

Las fórmulas de ajuste para un sistema como el que se muestra en la Ec. 13, se muestran en la Tabla 1 (Colmenares, 1999):

Tabla1. Ajuste empírico de controladores

Fórmula	$K_c$	$T_i$	$T_d$
Ziegler y Nichols	$\frac{1,2}{K T_N}$	$2 \tau_d$	$0,5 \tau$
ISE	$\frac{1,1907 T_N^{-0,89711}}{K}$	$\frac{\tau T_N^{0,9548}}{0,7987}$	$0,54766 \tau T_N^{0,87798}$
IAE	$\frac{0,98089 T_N^{-0,76167}}{K}$	$\frac{\tau T_N^{1,05211}}{0,91032}$	$0,59974 \tau T_N^{0,89819}$
ITAE	$\frac{0,77902 T_N^{-1,0640}}{K}$	$\frac{\tau T_N^{0,70949}}{1,14311}$	$0,57137 \tau T_N^{1,03826}$

##### 4.2. Ajustes basados en margen de fase y ganancia

Además de los ajustes convencionales que se enunciaron en la sección anterior y que normalmente están asociados a la respuesta temporal del lazo cerrado, Ho y col. (1997) proponen un enfoque menos convencional, a saber, basar el ajuste en el margen de fase ( $\phi_m$ ) y de ganancia ( $A_m$ ) del sistema.

El enfoque se basa en una aproximación de la función

arcotangente cuando el argumento es mayor que 1. A continuación se presentan las reglas de entonación para un PI, basados en este enfoque, siempre suponiendo una función de transferencia como en la Ec. 13, (Ho y col, 1997); la extensión a PIDs se puede encontrar en (Colmenares, 1999):

$$K_p = \frac{\omega_p \tau}{A_m K}$$

$$T_i = \left( 2\omega_p - \frac{4\omega_p^2 \tau_d}{\pi} + \frac{1}{\tau} \right)^{-1} \quad (14)$$

$$\omega_p = \frac{A_m \phi_m + \frac{1}{2} \pi A_m (A_m - 1)}{(A_m^2 - 1)\tau}$$

En las Ecs. 14 se suponen conocidos los parámetros del sistema de lazo abierto  $K$ ;  $\tau$ ;  $\tau_d$  y los márgenes deseados  $A_m$ ,  $\phi_m$ .

4.3. Ajuste basado en modelo interno - IMC PID

El método de entonación de PIDs basado en modelo interno (IMC-PID) se fundamenta en hacer que la respuesta del sistema de lazo cerrado sea aproximadamente, una de primer orden más retardo (FOPDT) de la forma (con relación a la Fig. 1):

$$T(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{e^{-\theta s}}{\tau_c s + 1} \quad (15)$$

donde  $T(s)$  es la función de transferencia del lazo cerrado –comúnmente denominada de sensibilidad complementaria (ver sección 1).

Observese que el método supone que el retardo que se mide en la salida es exactamente el mismo que el del sistema a controlar, esto es:

$$G(s) = \frac{A(s) e^{-\theta s}}{B(s)} \quad (16)$$

donde  $A(s)$  y  $B(s)$  son polinomios en  $s$ . Para resolver la exponencial que queda en el denominador de la función de transferencia en el lazo cerrado, el IMC-PID supone aproximaciones de primer orden para el retardo, ya sea de Pade o de la serie infinita de la exponencial, esto es:

$$e^{-\theta s} \approx \frac{1 - \theta s / 2}{1 + \theta s / 2} \quad \text{ó} \quad e^{-\theta s} \approx 1 - \theta s \quad (17)$$

Al igualar la función de transferencia del lazo cerrado,

en la que están las Ecs. 16 y 2, a aquella de la Ec. 15, resultan las reglas de entonación que se muestran en la Tabla 2 relativas al PID iterativo definido por la Ec. 2 según Skogestad (2003):

Tabla 2 Ajuste de PIDs basado en IMC

Proceso	$G(s)$	$K_p$	$T_i$	$T_d$
Primer Orden	$k \frac{e^{-\theta s}}{\tau_1 s + 1}$	$\frac{\tau_1}{k(\tau_c + \theta)}$	$\min\{\tau_1, 4(\tau_c + \theta)\}$	-
Segundo Orden	$\frac{k e^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$	$\frac{\tau_1}{k(\tau_c + \theta)}$	$\min\{\tau_1, 4(\tau_c + \theta)\}$	$\tau_2$
Retardo puro	$k e^{-\theta s}$	0	(*)	-
Integrador puro	$\frac{k e^{-\theta s}}{s}$	$\frac{1}{k(\tau_c + \theta)}$	$4(\tau_c + \theta)$	-
Integrador dinámico	$\frac{k e^{-\theta s}}{s(\tau_1 s + 1)}$	$\frac{1}{k(\tau_c + \theta)}$	$4(\tau_c + \theta)$	$\tau_1$
Integrador doble	$\frac{k e^{-\theta s}}{s^2}$	$\frac{1}{4k(\tau_c + \theta)^2}$	$4(\tau_c + \theta)$	$4(\tau_c + \theta)$

(\*)En el caso del retardo puro, se usa como control un integrador puro cuya ganancia es:  $K = 1/(k(\tau_c + \theta))$ .

Otras técnicas de ajuste de controladores PID tales como la de ubicación de polos con polinomios o las que usan parametrización de Youla no han sido incluidas por ser menos susceptibles de generalizar sus resultados en tablas. No por ello son estrategias menos poderosas y al lector interesado se le recomienda su revisión, por ejemplo en Goodwin (2001).

5 Comparación de técnicas de entonación

En esta sección se hace una comparación de la estrategia de entonación presentada en la sección 3.1 de este trabajo con otras técnicas ampliamente conocidas y que se mostraron en la sección 4. Con ello se pretende, por una parte enseñar las bondades del algoritmo propuesto pero además resaltar el hecho de que al contar con un buen modelo del sistema, es fácil encontrar herramientas sistemáticas de ajuste de controladores que asegurarán un buen desempeño del lazo cerrado.

Se han escogido cuatro casos tomados de (Skogestad). Ellos son: uno de orden elevado, otro de fase no mínima, un tercero con retardo y el último con un polo en el origen (integrador). La idea de tomar los mismos ejemplo de (Skogestad) es poder comparar en las mismas condiciones los distintos enfoques, y en particular comparar la estrategia ILMI-PID con la IMC-PID ya que se conoce que esta última goza de aceptación en el ambiente industrial.

En el caso de los métodos de IMC y de Ziegler y Nichols, al igual que para la mayoría de los métodos de ajuste de PIDs, aunque se da una función de transferencia del sistema para los ejemplos numéricos, la misma es ajustada, sea a una de primer orden más retardo o a una de segundo orden más retardo.

En el caso de ajuste con LMIs, la única simplificación realizada es la aproximación del retardo a una de Pade de primer orden. Ello, porque el método se basa en una repre-

sentación en variables de estado. Las aproximaciones de los modelos que se presentan a continuación a unos de primero orden (o segundo orden) más retardo pueden encontrarse en (Skogestad, 2003), al igual que los parámetros de ajuste a los PID que se han usado en los IMC-PID.

A continuación se presentan los resultados para cada caso. Para fines de comparación sólo se reseñan los resultados que se presentan en (Skogestad, 2003) y aquellos en los que se obtuvo respuesta estable.

### 5.1. Orden elevado

La función de transferencia del sistema es:

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+1)(0,04s+1)(0,2s+1)(0,008s+1)} \quad (18)$$

El modelo en variables de estado se generó con Matlab. El ajuste de los parámetros por los diferentes métodos se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3. Parámetros de los PID de orden elevado. (1) PID Paralelo y (2) PID Interactivo.

Método	Kp	Ki	Kd
LMI <sup>1</sup>	45,8488	129,4394	4,1817
IMC <sup>2</sup>	17,9	17,9	3,938
Z&N <sup>2</sup>	18,1	64,6429	1,267

En la Fig. 2 se muestran los resultados para una perturbación tipo escalón unitario, aplicado a los 20 segundos.

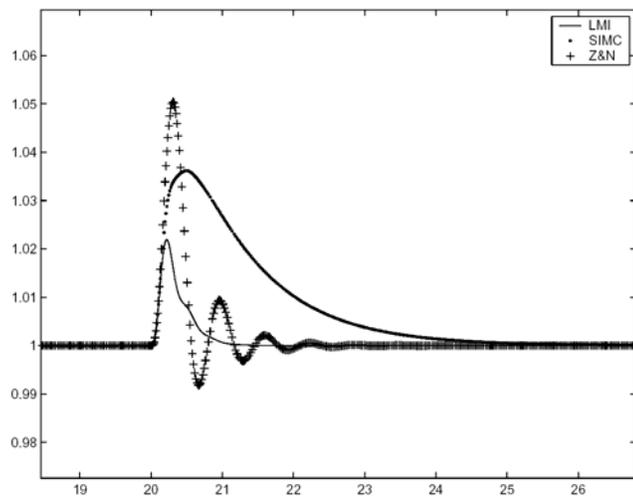


Fig. 2. Respuesta temporal del lazo de orden elevado

Los márgenes de fase y de ganancia comparados se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4. Comparación de indicadores de calidad. Caso orden elevado

Método	Fase	Ganancia
LMI <sup>1</sup>	31,1	5,5
IMC <sup>2</sup>	51	7,8
Z&N <sup>2</sup>	35,1	4,9

### 5.2. Fase no mínima

La función de transferencia del sistema es:

$$G_2(s) = \frac{(1-0,3s)(1+0,08s)}{(2s+1)(s+1)(0,4s+1)(0,2s+1)(0,05s+1)^3} \quad (19)$$

El modelo en variables de estado se generó con Matlab. El ajuste de los parámetros por los diferentes métodos se muestra en la Tabla 5.

Tabla 5. Parámetros de los PID de la Fase No Mínima. (1) PID Paralelo y (2) PID Interactivo.

Método	Kp	Ki	Kd
LMI <sup>1</sup>	2,092	0,5543	2,0673
IMC <sup>2</sup>	1,3	0,65	1,56
Z&N <sup>2</sup>	2,56	0,966	1,6896

En la Fig. 3 se muestran los resultados del sistema para una perturbación tipo escalón unitario, aplicado a los 30 segundos.

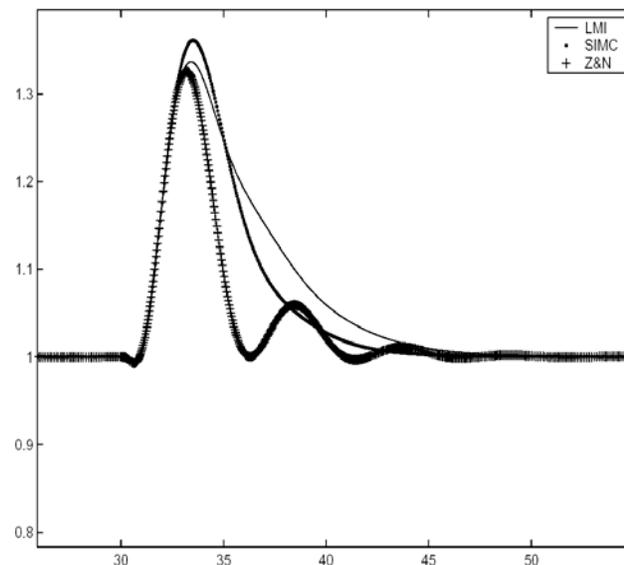


Fig. 3. Respuesta temporal del lazo de Fase No Mínima

Los márgenes de fase y de ganancia comparados se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6. Comparación de indicadores de calidad. Caso fase no mínima. (1) PID paralelo y (2) PID interactivo.

Método	Fase	Ganancia
LMI <sup>1</sup>	68,84	2,58
IMC <sup>2</sup>	57,95	2,89
Z&N <sup>2</sup>	31,2	1,87

### 5.3. Sistema con retardo

La función de transferencia del sistema es:

$$G_3(s) = \frac{(6s + 1)(3s + 1) e^{-0,3s}}{(10s + 1)(8s + 1)(s + 1)} \quad (20)$$

El retardo se sustituyó en G3(s) por:

$$e^{-3s} \approx \frac{1 - 1,5s}{1 + 1,5s}$$

y con esta aproximación se genera la representación en variables de estado con Matlab. El ajuste de los parámetros por los diferentes métodos se muestra en la Tabla 7.

Tabla 7. Parámetros de los PID del sistema con retardo. (1) PID paralelo y (2) PID interactivo.

Método	Kp	Ki	Kd
LMI <sup>1</sup>	3,6898	0,7192	-2,522
IMC <sup>2</sup>	7,41	7,41	-

En la Fig. 4 se muestran los resultados del sistema para una perturbación tipo escalón unitario, aplicado a los 20 segundos.

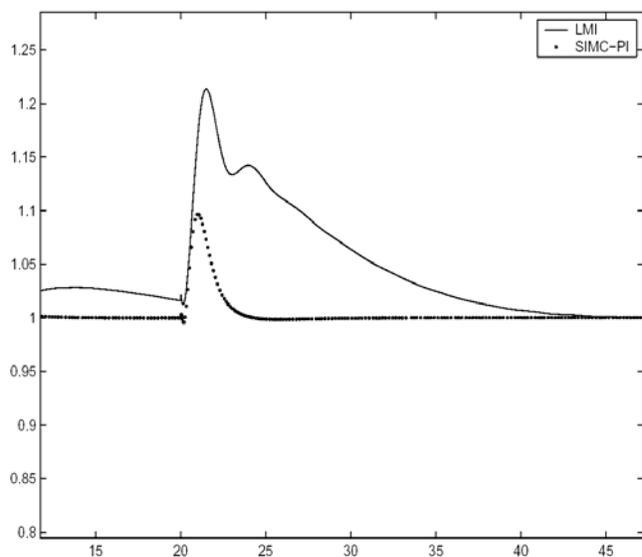


Fig. 4. Respuesta temporal del Sistema del Sistema con Retardo

Los márgenes de fase y de ganancia comparados se muestran en la Tabla 8.

Tabla 8. Comparación de Indicadores de Calidad. Caso Retardo

Método	Fase	Ganancia
LMI <sup>1</sup>	78,47	1,58
IMC-PI	51,67	3,05

#### 5.4. Sistema con polo en el origen

La función de transferencia del sistema es:

$$G_4(s) = \frac{(0,17s + 1)^2}{s(s + 1)^2(0,028s + 1)} \quad (21)$$

El ajuste de los parámetros por los diferentes métodos se muestra en la Tabla 9.

Tabla 9. Parámetros de los PID del sistema integrador. (1) PID paralelo y (2) PID interactivo.

Método	Kp	Ki	Kd
LMI <sup>1</sup>	38,6876	17,431	17,8783
IMC <sup>2</sup>	1,4	0,4895	1,862

En la Fig. 5 se muestran los resultados del sistema para una perturbación tipo escalón unitario, aplicado a los 20 segundos.

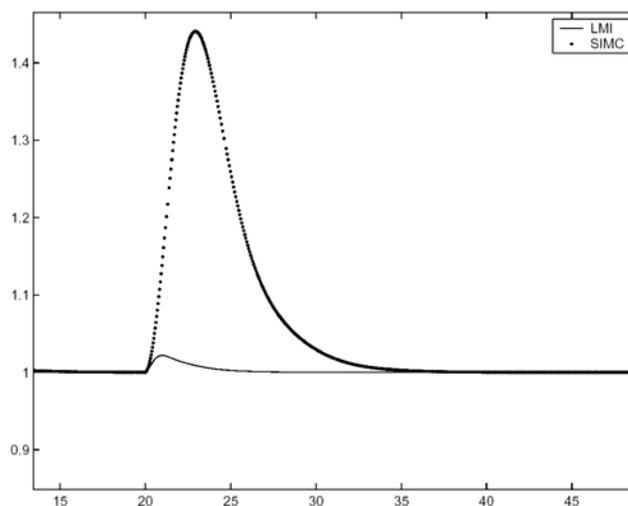


Fig. 5. Respuesta temporal del Sistema de con Integrador

Los márgenes de fase y de ganancia comparados se muestran en la Tabla 10.

Tabla 10. Comparación de indicadores de calidad. Caso integrador.

Método	Fase	Ganancia
LMI <sup>1</sup>	80,61	Inf
IMC <sup>2</sup>	52,35	Inf

Como se puede verificar, en todos los casos evaluados, los resultados obtenidos, tanto en el ámbito temporal como en el de la frecuencia, la estrategia propuesta obtiene ajustes que se comparan favorablemente con otras estrategias bien apreciadas y de uso frecuente en la industria, no se requiere, a diferencia de la estrategia IMC-PID, de parámetros que se determinan de manera heurística (como el  $\tau_c$ ).

Adicionalmente, el algoritmo puede implantarse usando herramientas estándar de diseño asistido por computador, como Matlab, y en cualquier caso se puede formular como uno de programación convexa convencional.

## 6 Conclusiones

En este trabajo se ha presentado una estrategia de entonación y ajuste de controladores industriales tipo PID. Aunque se ha aplicado el método sólo a sistemas de una entrada y una salida, la estrategia puede igualmente aplicarse a sistemas multivariables y a sistemas discretos. De la misma forma, la estrategia presentada no hace ninguna reducción del sistema (a uno de primer o segundo orden). Tampoco preestablece ningún indicador del desempeño del lazo, como es el caso de IMC, del que dependen fuertemente otras estrategias de entonación. Más bien, el sistema busca las mejores condiciones de desempeño del lazo, medido con la velocidad de respuesta, porque lo que se hace es una ubicación de los polos del sistema. El algoritmo, obtiene prestaciones del lazo cerrado que se comparan favorablemente con aquellas del IMP-PID y las de Ziegler y Nichols.

Otras condiciones de desempeño tales como H1 y H2 pueden incluirse como restricciones adicionales al problema que ya se ha formulado como uno en LMIs.

## Referencias

- Astrom KJ, 2002, Control system design. Lecture notes, Dpt. Mech. and Envirom. Eng, U. of California, <http://www.cds.caltech.edu/murray/courses/cds101/fa02/caltech/astrom.html>.
- Astrom KJ y Hagglund, T, 1995, PID controllers: theory, design and tuning, 2nd edition, Instrument Society of America, Research Triangle Park,
- Bernussou J, Geromel JC y. Peres, PLD, 1987, A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems, *Systems and Control Letters*, 8, pp. 351-357.
- Cao YY, Lam J y Sun YX, 1998, Static output feedback stabilization: An ILMI approach, *Automatica*, 34, 1641-1645.
- Colmenares W, 1999, Sintonización de controladores PID, Apuntes del curso de sistemas de control, <http://prof.usb.ve/williamc/PID/Pid.html>
- Goodwin G, Graebe S y Salgado M, 2001, Control system design, Prentice Hall.
- Dormido S y Morilla F, 1995, Autosintonía y métodos de antiwindup en los reguladores PID, Apuntes del XV curso de automática en la industria, AEIA.
- Granado E, Colmenares W, Bernussou J y Garcia, G, 2003, A robust multivariable PID controller with constraints via LMI approach, Proc. of 4th IFAC Symposium on Robust Control Design, Milan, Italy.
- Ho WK, Hang CC y Cao LS, 1995, Tuning of PID controllers based on gain and phase margin specifications, *Automatica*, Vol. 31, (3), pp. 497-502.
- Petersen IR, 1987, A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems, *Systems and Control Letters*, 8, pp. 351-357.
- Rivera DE, Morari M y Skogestad S, 1986, Internal model control. 4. PID controller design, *Ind. Eng. Chem. Res.* 25 (1) pp. 252-265.
- Scherer C, Gahinet P y Chilali M, 1997, Multiobjective output-feedback control via LMI optimisation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42 (7), pp. 896-911.
- Skogestad S, 2003, Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning, *Journal of Process Control* 13 pp. 291-309.
- Ziegler JG y Nichols NB, 1942, Optimum settings for automatic controllers, *Trans. A.S.M.E.*, 64 pp. 759-768.