Ciencia e Ingeniería Vo.XVIII,Nº2,pág.65 a 70(1986)

RESOLUCION DE PROBLEMAS DIFUSIONALES NO ESTACIONARIOS EN CUERPOS MULTICAPAS. ADOPCION DEL DETERMINANTE DE HILL

Florencio P. PLACHCO
Escuela de Ingeniería de Sistemas, Facultad de Ingeniería
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela

RESUMEN

Se ofrece un método de resolución de problemas difusionales unidireccionales en estado no estacionario que tienen lugar en cuerpos multicapas. El método se basa en considerar las multicapas como un solo cuerpo con propiedades variables; dentro de cada capa en forma contínua y en la interfase de dos capas en forma discontínua. Se hace uso de la transformada generalizada de Fourier y el problema de funciones y valores propios se reduce a la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas infinito que se resuelve por medio del determinante de Hill.

ABSTRACT

Resolution of non-stady state diffusional problems in multilayer media. Adoption of Hill determinant. In this work is presented a method for the solution of unidirectional diffusional problems in non-stady state that take place in multilayer media. The method is based in considering the multilayer media as only one body with variable properties; in continuous way inside of every layer and with finite discontinuities between layers. The eigen-values problem is reduced to the solutions of an infinite algebraic system equation, which in solved by the hill determinant.

PLANTEAMIENTO

En la resolución analítica de problemas difusionales no estacionarios, unidireccionales, en cuerpos multicapas surge la necesidad de resolver ecuaciones trascendentales por demás engorrosas para hallar los valores propios, lo cual lo hace poco práctico. En el presente trabajo se propone un método analítico para resolver problemas en cuerpos multicapas, considerando a éste como un sólo cuerpo con propiedades que varían en forma contínua dentro de cada capa y presenta una discontinuidad finita entre una capa y la otra. Se emplea la transformada generalizada de Fourier y las funciones y valores propios se determinan con la adopción del determinante de Hill.

El modelo matemático del problema propuesto se puede escribir: <1>

La solución del problema (7) a (9) es conveniente buscarla por medio de la transformada generalizada de Fourier <2> y <3>, cuya expresión final es:

$$\tau(\rho,F_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(\rho,\mu_m)}{\int_0^1 h(\rho)\cdot\Lambda^2(\rho,\mu_m)\, d\rho} \left\{ e^{-\mu_m^2 \cdot F_0} \cdot \tilde{\tau}_0(\mu_m) + \right.$$

$$\left. + \int_0^{F_0} e^{-\mu_m^2 (F_0-\xi)} \left\{ -\alpha_1(\mu_m)\cdot g_1(\xi) + \alpha_2(\mu_m)\cdot g_2(\xi) - \bar{F}(\mu_m,\xi) \right\} d\xi \right\} \quad (10)$$

donde

$$\tilde{\tau}_0(\mu_m) = \int_0^1 h(\rho)\cdot\Lambda(\rho,\mu_m)\cdot\tau_0(\rho)\, d\rho \quad (11)$$

$$\bar{F}(\mu_m\cdot\xi) = \int_0^1 \Lambda(\rho,\mu_m)\cdot F(\rho,F_0)\, d\rho \quad (12)$$

$$\alpha_j(\mu_m) = \Lambda(\rho=(j-1),\mu_m)/b_j \qquad \text{si } b_j \neq 0 \quad ; \; j=1,2 \quad (13a)$$

$$\alpha_j(\mu_m) = -\frac{d\Lambda}{d\rho}(\rho=(j-1),\mu) \qquad \text{si } b_j = 0 \quad ; \; a_j = 1 \; ; \; J = 1,2 \quad (13b)$$

Las funciones y valores propios se determinan en base a la siguiente ecuación diferencial y sus condiciones de contorno:

$$\frac{d^2\Lambda(\rho,\mu_m)}{d\rho^2} + \mu_m^2\, h(\rho)\cdot\Lambda(\rho,\mu_m) = 0 \qquad ; \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad (14)$$

$$a_j\cdot\Lambda(\rho,\mu_m) + b_j\,\frac{d\Lambda(\rho,\mu_m)}{d\rho} = 0 \qquad ; \quad \rho = (j-1) \quad ; \; j=1,2 \quad (15)$$

Resolución de las ecuaciones (14) y (15) con la ayuda del determinante de Hill

Si $h(\rho)$ satisface las condiciones de Dirichlet <4>, entonces es posible desarrollarla en una serie trigonométrica. Si la función $h(\rho)$ se extiende de tal forma que sea par, esto es $h(\rho) = h(-\rho)$; $0 \leq \rho \leq 1$ entonces la expansión será en función de cosenos. Para poder emplear la metódica de Hill es conveniente hacer el siguiente cambio de variables:

$$\frac{1}{r^s}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^s\ k(r)\frac{\partial T}{\partial r}\right) = h^*(r)\frac{\partial T}{\partial t} + F^*(r,t)\ ;\ r_1 \leqslant r \leqslant r_2\ ;\ t \geqslant 0\ ; \tag{1}$$

$$T = T_0(r) \qquad ;\ r_1 \leqslant r \leqslant r_2\ ;\ t = 0\ ; \tag{2}$$

$$a_j\ T + b_j^*\ \ k_j(r)\ r_j^s\ \frac{\partial T}{\partial r} = g_j^*(t) \qquad ;\ r = r_j\ ,\ j=1,2\ ;\ t \geqslant 0\ ; \tag{3}$$

donde

$s = \{0,1,2\}$, en el caso de $s = \{1,2\}$ se supone que $r_1 \geqslant 0$.

Debería notarse que $k_j(r)$, $h_j^*(r)$ y $F^*(t,r)$ son funciones contínuas de r dentro de una capa pero presentan una discontinuidad finita entre capa y capa.

Es conveniente hacer el siguiente cambio de variables:

$$\rho = \frac{1}{A}\int_{r_1}^{r}\frac{dr}{r^s\ k(r)}\ ;\ A = \int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^s\ k(r)}\ ;\ \tau(\rho,F_0) = T(r,t) \tag{4}$$

$$F = \nu_0 t\ ;\ h(\rho) = A^2\nu_0\cdot r^{2s}\cdot k(r)\cdot h^*(r)\ ;\ F(\rho,F_0) = A^2\cdot r^{2s}\cdot k(r)\cdot F^*(r,t) \tag{5}$$

$$b_j = b_j^*/A \qquad ;\ g_j(F_0) = g_j^*(t)\ \ ;\ j = 1,2\ ;\tau_0(\rho) = T(r,0) \tag{6}$$

En base a las definiciones (4) a (6) las ecuaciones (1) a (3) se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial\rho^2} = h(\rho)\frac{\partial\tau}{\partial F_0}\ + F(\rho,F_0)\quad ;\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1\ \ ;\ F_0 \geqslant\ 0 \tag{7}$$

$$\tau = \tau_0(\rho) \qquad ;\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1\ \ ;\ F_0 = 0 \tag{8}$$

$$a_j\tau + b_j\frac{\partial\tau}{\partial\rho} = g_j(F_0) \quad ;\ \rho = j-1,\ j=1,2\ ;\ F_0 \geqslant 0 \tag{9}$$

$$Z = \pi\rho/2 \qquad ; \quad U(Z) = \Lambda(\rho,\mu) \quad ; \quad J(Z) = h\ (\rho) \tag{16}$$

En base a (16) las ecuaciones (14) y (15) se escriben

$$\frac{d^2U(Z)}{dZ^2} + \nu\cdot J(Z)\cdot U(Z) = 0 \qquad ; \qquad 0 \leq Z \leq \pi/2 \tag{17}$$

$$A_j\cdot U(Z) + B_j\ \frac{dU(Z)}{dZ} = 0 \qquad ; \qquad Z = (j-1)\pi/2\ ;\ j = 1,2 \tag{18}$$

donde

$$\nu = (2\mu/\pi)^2\ ;\ A_j = a_j\ ;\ B_j = b_j\ \pi/2\ ;\ j = 1,2$$

Desarrollando J(Z) en serie de Fourier se obtiene

$$\nu J(Z) = \theta_0 + 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n\cdot\cos(2nZ)\ ;\ \theta_n = \frac{2\nu}{\pi}\int_0^{\pi/2} J(Z)\cdot\cos(2nZ)\cdot dZ \tag{19}$$

De la teoría de Floquet <6> se sigue que

$$U(Z) = c_1\cdot U_1(Z) + c_2\cdot U_2(Z) \tag{20}$$

donde

$$U_1(Z) = e^{\lambda Z}\cdot\phi(Z) \quad ; \quad U_2(Z) = e^{-\lambda Z}\ \phi(-Z) \quad ; \quad \phi(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n\cdot e^{i2nZ}$$

de donde se desprende que es suficiente hallar una de las soluciones linealmente independientes.

Reemplazando las expresiones de $U_1(Z)$ y $\nu.J(Z)$ en la ecuación (17) se obtiene el siguiente sistema infinito de ecuaciones algebráicas ($\theta_m = \theta_{-m}$):

$$(\lambda+2ni)^2\cdot b_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty}\theta_m\cdot b_{n-m} = 0 \quad ;\ n = \ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots \tag{21}$$

El sistema (21), luego de dividir cada ecuación por $\theta_0-(i\lambda-2n)^2$ se puede escribir en forma matricial, esto es

$$|B_{m,n}|\,|b_n| = 0 \tag{22}$$

donde : $B_{n,m} = 1$ si $n = m$; $B_{n,m} = \theta_{n-m}/\{(2n-i\lambda)^2 - \theta_0\}$ si $n \neq m$

El determinante de la matriz $|B_{m,n}|$ tiende a un límite cuando m y n tienden a ∞ si $\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n$ converge absolutamente. Este determinante se indica por $\Delta_1(i\lambda)$. El valor propio λ se obtiene de la ecuación

$$\sin^2(\pi i\lambda/2) = \Delta_1(0)\,\sin^2(\pi\theta_0^{1/2}/2) \tag{23}$$

En el cálculo de λ se puede suponer que $b_0 = 1$; entonces los coeficientes restantes, b_j, $j \neq 0$, se obtienen del sistema no-homogeneo de ecuaciones que se obtiene de (21), con $b_0 = 1$. Este cálculo se puede efectuar por medio de diferentes procedimientos: en forma exacta como se muestra en <9>; por aproximaciones sucesivas <10>; separando la fila con n = 0 de la matriz $|B_{m,n}|$ y resolviendo el sistema no-homogeneo via inversión de la matriz truncada; finalmente, como se describe en <8>, los coeficiente b_n son iguales a los menores de los elementos $B_{0,n}$ del determinante $\Delta_1(i\lambda)$.

<u>Cálculo de ν</u>. Las condiciones de contorno (18) conducen a la ecuación $D(\nu_i) = 0$, i = 1,2,...., donde

$$D(\nu) = \left(\frac{A_1\cdot U_1(Z) + B_1\cdot U_1'(Z)}{A_1\cdot U_2(Z) + B_1\cdot U_2'(Z)}\right)\Bigg|_{Z=0} - \left(\frac{A_2\cdot U_1(Z) + B_2\cdot U_1'(Z)}{A_2\cdot U_2(Z) + B_2\cdot U_2'(Z)}\right)\Bigg|_{Z=1}$$

NOTA: Aparte de los métodos reseñados, es posible resolver las ecuaciones (14) y (15) por medio de métodos numéricos de alta exactitud, los cuales ya mostraron su efectividad en acústica y en mecánica cuántica <11> a <14>, y por medio de métodos aproximados <10> a <15>.

REFERENCIAS

<1> LUIKOV A.V., Teoría Teploprovodnosti, Višaia Škola,Moskva (1967)

<2> KOSHLYAKOV N.S., SMIRNOV M.M., GLINER E.B., Differential Equations of Mathematical Physics, North-Holland, Amsterdan (1964)

<3> CHURCHIL R.V., Operational Mathematics, Mc Graw-Hill, N.Y. (1958)

<4> SNEDDON I.N., Fourier Transforms, Mc Graw-Hill, N.Y. (1951)

<5> HILL G.W., Collected Mathematical Works, Vol. 1, 243-270 (1905)

<6> WHITTAKER E.T., WATSON G..N., A Course of Modern Analysis, Cambrigde University Press, London (1973)

<7> MORSE Ph. M., FESHBACH H., Methods of Theoretical Physics ,Mc Graw Hill (1953)

<8> SUBBOTIN M.F., Vedenie v teoretičeskuiu astronomiiu, Nauka, Moskva, (1968)

<9> JAIRRYLIN I.J., (Pod. redakciei A.I. Markuševiča); Issledovaniia po sovremienim problemam teorii funckcii komplksnogo peremenovo Gos. izd-vo Fiziko-Matematiceskoi literaturi, cpt. 455. Moskva (1961)

<10> KANTOROVICH L.V., KRYLOV V.I., Aproximate Methods of Higher Analysis, Interscience, N.Y. (1964)

<11> COOLEY J.W., Math. Comp., 15, 363 (1961)

<12> OSBORNE M.R., Math. Comp., 16, 338 (1962)

<13> DENNIS S.C.R., Proc. Camb. Phil. Soc., 60, 67 (1964)

<14> ZAVADSKII V.Yu., Vičislenie Volnovych polei v otkritich oblastiach i Volnovadach, Nauka, Moskva (1972)

<15> KAMKE E., Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen, N.Y., Chelses (1971)