Artículo de Investigación. Revista Ciencia e Ingeniería. Vol. 36, No. 3 pp. 149-158, agosto-noviembre, 2015.
ISSN 1316-7081. ISSN Elect. 2244-8780 Universidad de los Andes (ULA)

Comparación de la rotura parabólica en el estudio de la estabilidad de taludes por el método analítico y el cálculo variacional

Comparison of parabolic failure in the study of slope stability by the analytical method and variational calculus

Belandria, Norly*; Ucar Roberto.
Universidad de Los Andes, Facultad de Ingeniería, Escuela de Geológica.
Grupo de Investigaciones en Geología Aplicada. (GIGA).
Mérida 5101. Venezuela.
* nbelandria@ula.ve

Resumen

La inestabilidad de las laderas y taludes en obras viales y minería generada por factores externos y antrópicos ayudan a desencadenar movimientos en masa produciendo el desprendimiento del material y obstaculizando la carretera o la extracción del mineral. La masa deslizante tiende a generar y buscar la superficie de rotura más propensa al deslizamiento la cual se asemeja geométricamente a un arco de círculo, aunque es común considerar otras geometrías de rotura como la plana, espiral logarítmica y parabólica, entre otras. En la siguiente investigación se propone comparar la rotura parabólica aplicando las condiciones de equilibrio y la rotación de ejes para determinar el nuevo tensor de esfuerzos. La comparación se lleva a cabo en corte vertical de 6 metros de altura, en el cual se divide la masa deslizante en cuatro rebanadas. En el estudio se determina el valor de la tensión normal en el punto medio de la base de cada rebanada y el factor de seguridad. Los resultados obtenidos son prácticamente los mismos por los diferentes métodos, lo que permite validar el método numérico propuesto para resolver el sistema de ecuaciones no lineales al aplicar el cálculo de variaciones.

Palabras clave: Talud, rotación de ejes, cálculo de variaciones, superficie de rotura, parábola.

Abstract

The instability of slopes and hillsides in roadworks and mining generated by external and anthropogenic factors help to trigger mass movements causing the detachment of material obstructing circulation or mineral extraction. The sliding mass tends to generate and search the failure surface more likely to slip which geometrically resembles a circular arc, although other failure geometries are commonly considered, such as planes, logarithmic spiral, and parabola, among others. The aim of this research is to compare the parabolic failure by applying the equilibrium conditions and the rotation of axes to determine the new stress tensor. The comparison is performed in vertical section of six meters high, in which the sliding mass is divided into four slices. In this study, the value of the normal stress at the midpoint of the base of each slice and the safety factor are determined. The obtained results are practically the same for the different methods, allowing validate the proposed numerical method to solve the system of nonlinear equations by applying variational calculus.

Key words: Slope, rotation axes, variational calculus, surface failure, parabola.

1 Introducción

Al momento de construir una obra civil o extraer un mineral que se encuentra cerca de la superficie del terreno hace que se realicen cortes en un terreno natural lo que genera un talud, el cual se puede diseñar para que sea estable en el tiempo que cumpla su función. Los taludes están formados por suelo o macizo rocoso. Dependiendo del material del talud se pueden generar diferentes tipos de superficies de falla, por ejemplo en macizos rocosos la superficie de falla depende de las discontinuidades presentes y pueden generarse roturas plana, cuña y en vuelco, mientras que en suelos la superficie de falla forma aproximadamente un arco

de círculo aunque puede aproximarse a la forma parabólica o espiral logarítmica. La presente investigación estudia la superficie de rotura parabólica para un talud en el que se emplean dos métodos diferentes. En la primero se aplica la técnica de rotación de ejes, junto con las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de borde. En el segundo se utilizan los procedimientos matemáticos del cálculo de variaciones conjuntamente con las condiciones de equilibrio estático a lo largo de la línea potencial de falla que formuladas en forma de integrales con ciertas condiciones de contorno, es posible minimizar dichas integrales, y por ende, determinar la superficie que resulta en el mínimo factor de seguridad. El cálculo de variaciones genera un sistema de ecuaciones no lineales y para la solución se apoya en los métodos numéricos y en software como el Maple.

2 Antecedentes

Son muchos los investigadores que han aplicado diferentes técnicas para diseñar taludes estables en las diferentes obras de ingeniería. Entre los métodos utilizados se encuentra el equilibrio límite que fue ampliamente estudiado por (Fellenius 1936, Janbu 1954, Bishop 1955, Morgenstern y col., 1965, Spencer 1967). La aplicación del cálculo variacional en el estudio de estabilidad de taludes en principio fue propuesta por (Baker y col., 1977, Chen 1975, Castillo y col., 1976, Leshchinsky y col.,1992, Rojas y col., 2001, Mac-Lennan 2004, Baker 2005). La siguiente investigación se basa en la aplicación de una metodología para resolver el sistema de ecuaciones no lineales presentadas en (Úcar 2004), considerando el caso más general de 'n' rebanadas en que se divide la masa deslizante, el cual se compara con un método analítico propuesto por (Belandria y col., 2008, 2011) para una superficie de rotura que tiene forma de parábola.

3 Metodología empleada

3.1 Determinación de la superficie de rotura parabólica en un talud

Se analiza un talud con una inclinación β (ver figura 1), cuya superficie potencial de falla a estudiar tiene forma parabólica, determinándose a la vez la distribución de esfuerzos mediante rotación de ejes.

La ecuación de una rotura parabólica general que se propone es la siguiente:

$$y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \tag{1}$$

Donde, a_1, a_2 y a_3 son las constantes de la ecuación parabólica.

Considerando la figura 1 y aplicando las condiciones de contorno es posible determinar las constantes a_1, a_2 y a_3, teniendo en cuenta:

1 La curva pasa por el origen, es decir cuando x = 0; y = 0, la constante $a_3 = 0$.

2 En la cresta del talud, cuando y = H, x = ΩH. En estas condiciones la ecuación 1, se transforma:

$$H = a_1 (\Omega H)^2 + a_2 \Omega H \tag{2}$$

3 La tercera condición se fundamenta en considerar que la pendiente en el origen es cero. Lo anterior indica que $\left(dy/dx\right)_{x=0} = 0$, resultando que la constante $a_2 = 0$, y por lo tanto:

$$a_1 = \frac{1}{\Omega^2 H} \tag{3}$$

Donde, H, es la altura del talud, Ω, es la constante de la abscisa que permite determinar el corte de la superficie de rotura con la cresta del talud.

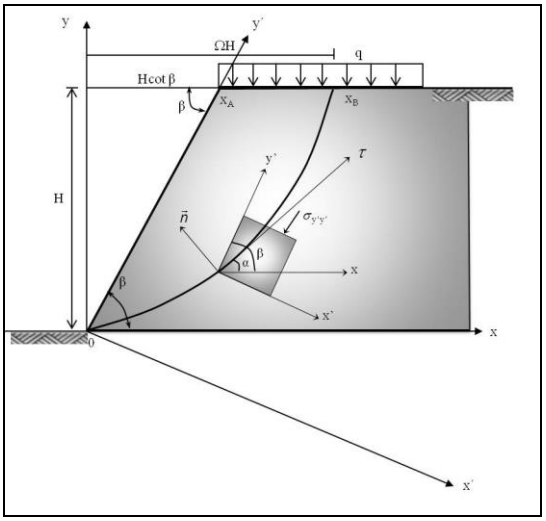


Fig. 1 Representación de la superficie de rotura parabólica y sus relaciones geométricas.

Una vez conocidas las constantes de la ecuación 1, la curva parabólica queda definida por la siguiente expresión:

$$y = \frac{x^2}{\Omega^2 H} \tag{4}$$

Derivando la ecuación anterior, el ángulo 'α' que forma la tangente a la curva puede escribirse como sigue:

$$\frac{dy}{dx} = \tan\alpha = \left[\frac{2x}{\Omega^2 H}\right] \tag{5}$$

Donde, α, es el ángulo que forma la superficie de rotura con la abscisa.

3.2 Método analítico en la rotura parabólica aplicando la técnica de rotación de ejes

3.2.1 Determinación del esfuerzo normal y tangencial

La ecuación de la distribución de los esfuerzos normales y cortantes a lo largo de la superficie de rotura se determina relacionando el plano de coordenadas x'y' que coincide con la cara libre del talud , con otro plano x"y" que coincide con la superficie de rotura (ver figura 1), a través de la matriz de rotación según (Apostol 1965).

$$\sigma_{x"y"} = \overline{\overline{R}}\,\sigma_{x'y'}\,\overline{\overline{R}}^{T} \tag{6}$$

Donde, $\overline{\overline{R}}$ es la matriz de rotación que incluye los cosenos directores que relacionan ambos planos, $\sigma_{x'y'}$, es la matriz de esfuerzos referida al plano x'y', $\sigma_{x"y"}$, es la matriz de esfuerzos referida al plano x"y" .

La distribución de los esfuerzos (Goncalves 1999) sobre la superficie de rotura, se realiza con la ayuda de la aplicación de las ecuaciones de equilibrio en la figura 1donde se realizan sumatoria de fuerzas en x', y' y de momento, los cuales permiten la obtención de las tensiones normales y cortantes que actúan en el plano x'y' , las cuales son:

$$\begin{aligned}
&\sum F_{x'} = 0 && \frac{\partial\sigma_{x'x'}}{\partial x'} + \frac{\partial\tau_{y'x'}}{\partial y'} = \gamma\cos\beta \\
&\sum F_{y'} = 0 && \frac{\partial\sigma_{y'y'}}{\partial y'} + \frac{\partial\tau_{x'y'}}{\partial x'} = -\gamma\,\mathrm{sen}\beta \\
&\sum M_{x'} = 0 && \tau_{y'x'} = \tau_{x'y'}
\end{aligned} \tag{7}$$

Donde γ, representa el peso por unidad de volumen del material rocoso, β, buzamiento del talud, $\sigma_{x'x'}$ y $\sigma_{y'y'}$, esfuerzos normales referido al plano x'y', $\tau_{x'y'}$ el esfuerzo cortante referido al plano x'y'.

Considerando que el esfuerzo cortante es una función lineal de x' y luego derivando, integrando y simplificando la expresión 7 se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{x'x'} = \gamma\cos\beta\, x' \\
&\sigma_{y'y'} = \left(-\gamma\,\mathrm{sen}\beta - a\right)y' + b
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\tau_{x'y'} = ax'$$

Donde a y b son constantes de integración.

Para determinar el esfuerzo normal (σ_{nn}), se resuelve el sistema matricial de la expresión 6, donde $\sigma_{x"x"} = \sigma_{nn}$, (Belandria y col., 2008, 2011), es decir:

$$\begin{aligned}
\sigma_{nn} = {} & \sigma_{x'x'}\cos^2(\beta-\alpha) + \sigma_{y'y'}\,\mathrm{sen}^2(\beta-\alpha) \\
& + 2\tau_{x'y'}\,\mathrm{sen}(\beta-\alpha)\cos(\beta-\alpha)
\end{aligned} \tag{9}$$

Reemplazando las condiciones indicadas en la ecuación 8, la curva parabólica de la ecuación 4, las relaciones $x' = x\,\mathrm{sen}\beta - y\cos\beta$ y $y' = x\cos\beta + y\,\mathrm{sen}\beta$ obtenida por relaciones geométricas de la figura 1 y dividiendo entre γH para adimensionar la ecuación, la expresión del esfuerzo normal (9) toma la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{nn}}{\gamma H} = {} & \left\{\left(x/H\right)\mathrm{sen}\beta - \left(x/\Omega H\right)^2\cos\beta\right\}\cdot \\
& \left[\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha) - \bar{a}\,\mathrm{sen}\left[2(\beta-\alpha)\right]\right] + \\
& \left\{\bar{b} - \left(\mathrm{sen}\beta + \bar{a}\right)\left[\left(x/H\right)\cos\beta + \left(x/\Omega H\right)^2\mathrm{sen}\beta\right]\right\}\cdot \\
& \mathrm{sen}^2(\beta-\alpha)
\end{aligned} \tag{10}$$

Para determinar el esfuerzo cortante (τ_{nt}), se resuelve el sistema matricial de la expresión 6, donde $\tau_{x"y"} = \tau_{nt}$, (Belandria y col., 2008, 2011), es decir:

$$\tau_{nt} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{x'x'} - \sigma_{y'y'}\right)\mathrm{sen}\left[2(\beta-\alpha)\right] + \tau_{x'y'}\cos\left[2(\beta-\alpha)\right] \tag{11}$$

Realizando el mismo procedimiento aplicado para el esfuerzo normal, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_{nt}}{\gamma H} = {} & \frac{1}{2}\left[\cos\beta\left(\left(x/H\right)\mathrm{sen}\beta - \left(x/\Omega H\right)^2\cos\beta\right) + \right. \\
& \left(\mathrm{sen}\beta + \bar{a}\right)\left(\left(x/H\right)\cos\beta + \left(x/\Omega H\right)^2\mathrm{sen}\beta\right) - \bar{b}\Big]\cdot \\
& \mathrm{sen}\left[2(\beta-\alpha)\right] + \bar{a}\left[\left(x/H\right)\mathrm{sen}\beta - \left(x/\Omega H\right)^2\cos\beta\right]\cdot \\
& \cos\left[2(\beta-\alpha)\right]
\end{aligned} \tag{12}$$

3.2.2 Determinación de las constantes de integración a y b

Las constantes a y b se calculan teniendo en cuenta la siguiente expresión que relaciona el plano xy con respecto al plano x'y' aplicando la rotación de ejes (Belandria y col., 2008, 2011):

$$\sigma_{xy} = \overset{=}{R}^{T} \cdot \sigma_{x'y'} \cdot \overset{=}{R} \qquad (13)$$

Donde, σ_{xy} es la matriz de esfuerzos referida al plano xy, $\sigma_{x'y'}$ es la matriz de esfuerzos referida al plano x'y', $\overset{=}{R}$ es la matriz de rotación que incluye los cosenos directores que relacionan ambos planos.

Al resolver la ecuación matricial anterior se obtiene la expresión del esfuerzo σ_{yy}, que representa el esfuerzo normal y τ_{xy} es el esfuerzo tangencial, ambos referidos al plano xy de la figura 1.

$$\sigma_{yy} = \sigma_{y'y'}\text{sen}^2\beta + \sigma_{x'x'}\cos^2\beta - 2\tau_{x'y'}\text{sen}\beta\cos\beta$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{y'y'} - \sigma_{x'x'}\right)\text{sen}2\beta - \tau_{x'y'}\cos 2\beta \qquad (14)$$

Por otra parte, las condiciones de borde en la cresta del talud son:

$$\int_{X_A}^{X_B} \sigma_{yy}\,dx \quad \Rightarrow \quad qH\left(\cot\beta - \cot\alpha\right)$$

$$\int_{x_A}^{x_B} \tau_{xy}\,dx = 0 \quad \therefore \quad y = H \qquad (15)$$

Donde, q es una carga externa uniformemente distribuida sobre la cresta del talud o sobrecarga.

Al reemplazar σ_{yy} y τ_{xy} de la ecuación 14 en las condiciones de borde de la ecuación 15 se obtienen las siguientes expresiones:

$$\bar{a} = \frac{\left(\bar{q} - \xi_2\right)2\cos\beta - \mu_2\,\text{sen}\beta}{\left(\psi_2\,2\cos\beta + \theta_2\,\text{sen}\beta\right)}; \quad \bar{b} = \frac{\bar{q} - \xi_2 - \bar{a}\psi_2}{\text{sen}^2\beta} \qquad (16)$$

Donde:

$\bar{a} = a/\gamma$ y $\bar{b} = b/\gamma H$, representan las constantes de integración adimensionales, siendo además:

$$\theta_2 = \left(3\cos^2\beta - 1\right)\left[\left(\cot\alpha + \cot\beta\right)\text{sen}\beta - 2\cos\beta\right] + 2H\cos\beta$$

$$\mu_2 = \cos\beta\,\text{sen}2\beta\left[\left(\cot\alpha + \cot\beta\right)\text{sen}\beta - 2\cos\beta\right] + \text{sen}2\beta$$

$$\psi_2 = \left[\frac{3}{2}\text{sen}2\beta\cos\beta - \text{sen}\beta - \frac{3}{4}\left(\cot\alpha + \cot\beta\right)\text{sen}2\beta\,\text{sen}\beta\right]$$

$$\xi_2 = \left[\frac{1}{4}\left(\cot\alpha + \cot\beta\right)\text{sen}2\beta\cos 2\beta - \cos^2\beta\cos 2\beta - \text{sen}^2\beta\right]$$

3.2.3 Determinación del factor de seguridad

La ecuación del factor de seguridad 'FS', considerando el método de equilibrio límite y el criterio de rotura de Morh -Coulomb, se puede expresar a través de la conocida ecuación:

$$FS = \frac{\left[C + \left(\sigma - u\right)\tan\phi\right]}{\tau} \qquad (17)$$

Donde, C es la cohesión, tanϕ es el coeficiente de rozamiento, FS es el factor de seguridad, u es la presión de poros y τ es la tensión tangencial en la superficie de falla.

Para determinar el valor medio del esfuerzo normal y tangencial se aplica la ecuación del teorema del valor medio definido a través de la siguiente expresión:

$$y_{medio} = \frac{1}{x_B - x_A}\int_{x_A}^{x_B} f\left(x\right)dx \qquad (18)$$

Donde x_A y x_B representan los límites en la cresta del talud siendo $x_A = H\cot\beta$ y $x_B = \Omega H$.

3.3 Aplicación del cálculo de variaciones

Previamente a la aplicación del cálculo de variaciones y conocida la superficie de rotura de tipo parabólica, a continuación se indica la ecuación de equilibrio expresada vectorialmente de acuerdo a la figura 2:

$$J_1 = \int\left(\tau\,\vec{t_0} + \sigma\,\vec{n_0}\right)ds + \int_{x_0}^{x_m}\frac{\vec{q}}{\cos\beta_t}dx$$
$$-\left(1 + K_v\right)\int_{x_0}^{x_m}\left[g\left(x\right) - y\left(x\right)\right]\vec{j}\,dx \qquad (19)$$
$$-\gamma K_h\int_{x_0}^{x_m}\left[g\left(x\right) - y\left(x\right)\right]\vec{j}\,dx$$

Donde:

τ = τ(x) = La tensión tangencial actuando sobre y(x)

σ = σ(x) = La tensión normal actuando sobre y(x)

γ = Peso unitario del suelo o roca

ds = Diferencial de longitud de la superficie potencial

de rotura

K_h = Coeficiente sísmico horizontal
K_v = Coeficiente sísmico vertical
g(x) = Función de la superficie del talud
y(x) = Función de la superficie de rotura

A la vez las sumatorias de fuerzas horizontales, verticales y de momento, pueden expresarse mediante las ecuaciones:

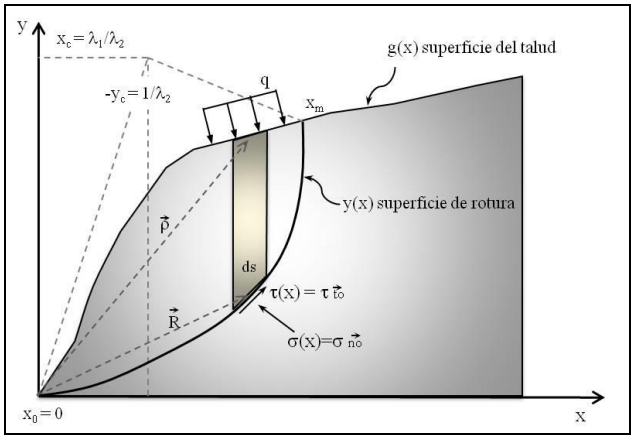


Fig. 2 Parámetros involucrados en el talud aplicando cálculo de variaciones.

$$\int_{x_0}^{x_m}\left\{\begin{array}{l} C+(\sigma-u)\tan\phi \\ -FS\left[\sigma\,y'(x)+K_h\,\gamma\big(g(x)-y(x)\big)-\dfrac{q_x}{\cos\beta_t}\right]\end{array}\right\}dx=0$$

$$\int_{x_0}^{x_m}\left\{\begin{array}{l} \Big[C+(\sigma-u)\tan\phi\Big]y'(x) \\ +FS\left[\sigma+\dfrac{q_y}{\cos\beta_t}-\gamma(1+K_v)\big(g(x)-y(x)\big)\right]\end{array}\right\}dx=0$$

$$\int_{x_0}^{x_m}\left\{\begin{array}{l} \Big[C+(\sigma-u)\tan\phi\Big]\Big[y(x)-x\,y'(x)\Big] \\ -FS\left[\begin{array}{l}\sigma\big(x+y(x)\,y'(x)\big) \\ +\dfrac{1}{\cos\beta_t}\big(x\,q_y-q_x\,g(x)\big) \\ -\gamma x(1+K_v)\big(g(x)-y(x)\big) \\ +\gamma\,K_h\left[\dfrac{g(x)^2-y(x)^2}{2}\right]\end{array}\right]\end{array}\right\}dx=0 \qquad (20)$$

Donde, C es la cohesión del material, u es la presión de poros, σ es la tensión normal a la superficie de rotura, FS, factor de seguridad, qx y qy es la sobrecarga referida a la abscisa y ordenada, tanϕ es el coeficiente de fricción interna y $y'(x)=\left(dy/dx\right)$.

Para la solución de estas integrales (ecuación 20) se utiliza la integración numérica compuesta (regla compuesta del punto medio). Cabe destacar que puede aplicarse cualquier integración numérica con menor error de aproximación.

Posteriormente se requiere de un funcional 'G' que agrupe las ecuaciones de equilibrio incorporando para esto los multiplicadores de Lagrange (λ_1 y λ_2), es decir, $G=\sum F_h+\lambda_1\sum F_v+\lambda_2\sum M$, donde el primer término representa la sumatoria de fuerzas horizontales, el segundo la sumatoria de fuerzas verticales y el tercero la sumatoria de momentos expresadas en la ecuación 20. Además considerando que $y_c=-1/\lambda_2$; $x_c=\lambda_1/\lambda_2$ y simplificando se obtiene:

$$\begin{aligned} G=&\big(C+(\sigma-u)\tan\phi\big)(y-y_c) \\ &-\big(C+(\sigma-u)\tan\phi\big)y'(x)(x-x_c) \\ &-FS\,\sigma(x-x_c)-FS\,\sigma\,y'(x)(y-y_c) \\ &+\frac{FS\,q_x}{\cos\beta_t}(g-y_c)-\frac{FS\,q_y}{\cos\beta_t}(x-x_c) \\ &+y_c FS\,K_h\,\gamma(g-y)-FS\,K_h\,\gamma\left(\frac{g^2-y^2}{2}\right) \\ &+FS\,\gamma(1+K_v)(g-y)(x-x_c)=0 \end{aligned} \qquad (21)$$

Donde, x_c y y_c, es un centro geométrico que dependen de los multiplicadores de Lagrange (λ_1 y λ_2).

Por otra parte, al considerar las ecuaciones de Euler, para el caso estudiado, $\frac{\partial G}{\partial\sigma}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial\sigma'}\right)$ y $\frac{\partial G}{\partial y}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)$ y hallando cada una de las derivadas del funcional 'G', resulta:

$$\begin{aligned} &\left(dy/dx\right)\big[\tan\phi(x-x_c)+FS(y-y_c)\big] \\ &+FS(x-x_c)-\tan\phi(y-y_c)=0 \end{aligned} \qquad (22)$$

$$\begin{aligned} &\big[\tan\phi(x-x_c)+FS(y-y_c)\big]\left(d\sigma/dx\right) \\ &-(x-x_c)\left[\left(du/dx\right)\tan\phi+\gamma(1+K_v)FS\right] \\ &+2C+2(\sigma-u)\tan\phi+FS\,K_h\,\gamma(y-y_c)=0 \end{aligned} \qquad (23)$$

Según (Mac-Lennan 2004) se deben combinar ambas ecuaciones de Euler, lo que permite determinar la superficie crítica, esto da como resultado la siguiente expresión**:**

$$\left[\tan\phi\left(y-y_c\right)+FS\left(x-x_c\right)\right]\left[\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)\Big/\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]$$
$$-\left(x-x_c\right)\left[\left(\frac{du}{dx}\right)\tan\phi+\gamma\left(1+K_v\right)FS\right]$$
$$+2C+2\left(\sigma-u\right)\tan\phi+FSK_h\,\gamma\left(y-y_c\right)=0 \qquad (24)$$

Cabe destacar que las pendientes o derivadas de la tensión $\left(d\sigma/dx\right)$, presión de poros $\left(du/dx\right)$ y coordenada de la superficie de rotura $\left(dy/dx\right)$ en cada rebanada 'n' de las ecuaciones 23, 24 y 25 se utilizan las siguientes expresiones:

$$\left(\frac{d\sigma_n}{dx}\right)=\frac{1}{2\Delta x}\left(3\sigma_n-4\sigma_{n-1}+\sigma_{n-2}\right)$$
$$\left(\frac{du_n}{dx}\right)=\frac{1}{2\Delta x}\left(3u_n-4u_{n-1}+u_{n-2}\right)$$
$$\left(\frac{dy_n}{dx}\right)=\frac{1}{2\Delta x}\left(3y_n-4y_{n-1}+y_{n-2}\right) \qquad (25)$$

4 Análisis de resultados

Para la comparación de los resultados considerando conocida la superficie de rotura parabólica, se lleva acabo un ejemplo con los siguientes datos teniendo en cuenta la geometría y propiedades del material: altura del talud ,H = 6 m, ángulo que forma la cara libre del talud con respecto a la horizontal, β = 90°, cohesión , C = 20 kN/m^2, ángulo de fricción interna, ϕ = 22,6°, coeficiente sísmico horizontal, K_h = 0 y vertical, K_v = 0, presión de poros, u =0, sobrecarga, q = 0. Las condiciones de contorno para la superficie potencialde rotura son: coordenadas en el pie del talud (0 ; 0) y en la cresta del talud (2,5 ; 6).

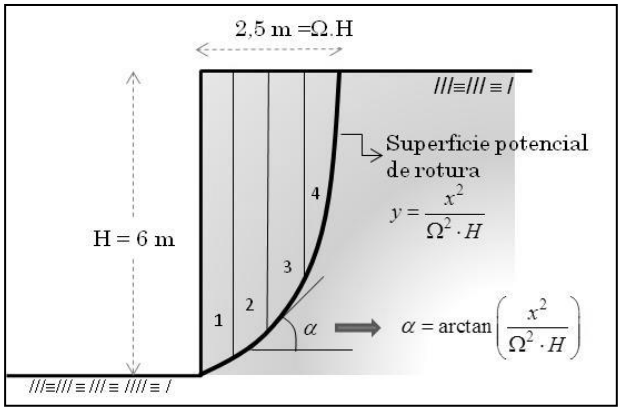


Fig. 3 Talud con rotura parabólica, ejemplo utilizado para la comparación del método analítico con el cálculo de variaciones.

4.1 Resultados del método analítico utilizando la técnica de rotación de ejes

Para la aplicación de las ecuaciones del método analítico se debe determinar en primer lugar el valor de Ω que depende de las condiciones de contorno dada para la parábola en la cresta del talud, el cual arroja como resultado Ω = 0,416. Posteriormente se buscan los puntos (x, y) que pertenezcan a la ecuación de la parábola y de esta manera determinar los esfuerzos normales a cada punto para su comparación con el método de cálculo de variaciones.

La superficie deslizante se divide para este ejemplo en cuatro rebanadas tal como se muestra en la figura 3, siendo el ancho de rebanada (Δx) igual a 0,625. Luego se determinan los puntos medios x e y de cada rebanada a través de la ecuación 4.

Tabla 1. valores de los puntos pertenecientes a la superficie de parabólica.

Rebanada	x (m)	y (m)
(pie)	0,00	0,00
1	0,31	0,09
2	0,94	0,85
3	1,56	2,35
4	2,19	4,61
(cresta)	2,50	6,02

Seguidamente se determina cada una de las variables de la ecuación 16, es decir, ψ_2, ε_2, θ_2, μ_2, los cuales permiten determinar las constantes de integración adimensionales $\bar{a}$ y $\bar{b}$, obteniéndose los siguientes resultados:

Tabla 2. Valores de las variables que permiten determinar los parámetros adimensionales a y b

ξ_2	μ_2	ψ_2	θ_2	$\bar{a}$	$\bar{b}$
-1,00	0,00	-1,00	-0,42	0,00	1,00

Finalmente se determinan las tensiones normales y tangenciales en cada punto de la superficie de rotura señalados en la tabla 1, aplicando las ecuaciones 10 y 12 respectivamente. los resultados se muestran en la tabla 3.

Tabla 3. Esfuerzos normales y tangenciales determinados a lo largo de la superficie de rotura parabólica por rotación de ejes

Esfuerzos para c/u rebanadas	$\sigma_{nn}/\gamma H$	$\tau_{nt}/\gamma H$	σ_{nn} (kN/m^2)	τ_{nt} (kN/m^2)
σ_0	1,00	0,00	120,00	0,00
σ_1	0,72	0,43	86,70	52,18
σ_2	0,20	0,36	24,19	43,68
σ_3	0,06	0,18	7,25	21,83
σ_4	0,01	0,05	1,48	6,25
σ_5	-0,0001	0,00	-0,016	0,001

El esfuerzo σ_0 y σ_5, representa los valores de los esfuerzos en la cresta y pie del talud. Mientras que los esfuerzos σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, representan los valores del esfuerzo en el punto medio de cada rebanada. Los esfuerzos normales en el punto medio de cada rebanado está representado por (σ_{nn}), mientras que los esfuerzos tangenciales por (τ_{nt}).

El factor de seguridad se determina a través de la ecuación 17, aplicando el teorema del valor medio de la ecuación 18 en las expresiones 10 y 12 que corresponden al esfuerzo normal y tangencial respectivamente en el intervalo de 0 a 2,5; arroja un factor de seguridad **FS** igual a **1,128**.

4.2 Resultados obtenidos aplicando la técnica del cálculo de variaciones

Para la aplicación del cálculo de variaciones se realiza la programación en el software de Maple en el que se introdujeron diferentes subrutinas y programaciones, donde: n y r, representa el número de rebanadas en que se subdivide la masa deslizante, d, es un parámetro utilizado para las dos primeras rebanadas y es igual a r-2, hb, es la constante de integración para resolver de manera numérica las integrales propuestas en la ecuación 20, Δx, el ancho de la rebanada, ψ, es el coeficiente de fricción (tan ϕ), pu, es el peso unitario.

A continuación se presentan las expresiones introducidas en el programa:

a) Sumatoria de las fuerzas horizontales de la ecuación 20, aplicando la integración numérica compuesta para "n" rebanadas se expresa de la siguiente manera:

for n from 3 by 1 to r do

$$f_1 := f_1 + hb\left(C + \sigma_n \psi - FS\sigma_n\left(\frac{1}{2\Delta x}\right)\left(3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}\right)\right)$$

if n > d then

$$f_1 := f_1 + hb\left(C + \sigma_{n-d} \psi - FS\sigma_{n-d}\left(\frac{1}{2\Delta x}\right)\left(-3y_{n-d} + 4y_{n-d+1} - y_{n-d+2}\right)\right)$$

end if

end do

b) La sumatoria de fuerzas verticales aplicando la técnica de integración compuesta para la ecuación 20 con "n" rebanadas, queda:

for n from 3 by 1 to r do

$$f_2 := f_2 + hb\left(\begin{array}{l}\left(C + \sigma_n \psi\right)\left(\frac{1}{2\Delta x}\right)\left(3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}\right) \\ +FS\sigma_n - FS\ pu\left(g_n - y_n\right)\end{array}\right)$$

if n > d then

$$f_2 := f_2 + hb\left(\begin{array}{l}\left(C + \sigma_{n-d} \psi\right)\left(\frac{1}{2\Delta x}\right)\left(-3y_{n-d} + 4y_{n-d+1} - y_{n-d+2}\right) \\ +FS\sigma_{n-d} - FS\,pu\left(g_{n-d} - y_{n-d}\right)\end{array}\right)$$

end if

end do

c) La sumatoria de los momentos aplicando la técnica de integración compuesta para la ecuación 20, considerando "n" rebanadas:

for n from 3 by 1 to r

do $f_3 := f_3 + hb\left(\begin{array}{l}\left(C + \sigma_n \psi\right)\left(y_n - x_n\left(\frac{1}{2\Delta x}\right)\left(3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}\right)\right) \\ -FS\sigma_n\left(x_n + y_n\left(\frac{1}{2\Delta x}\right)\left(3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}\right)\right) \\ +FS\ x_n\ pu\left(g_n - y_n\right)\end{array}\right)$

if n > d then

$$f_3 := f_3 + hb\left(\begin{array}{l}\left(C + \sigma_{n-d} \psi\right)\left(\begin{array}{l}y_{n-d} - x_{n-d}\left(\frac{1}{2\Delta x}\right) \\ \cdot\left(-3y_{n-d} + 4y_{n-d+1} - y_{n-d+2}\right)\end{array}\right) \\ -FS\sigma_{n-d}\left(x_{n-d} + y_{n-d}\left(\frac{1}{2\Delta x}\right)\left(-3y_{n-d} + 4y_{n-d+1} - y_{n-d+2}\right)\right) \\ +FS\ x_{n-d}\ pu\left(g_{n-d} - y_{n-d}\right)\end{array}\right)$$

end if

end do

d) La integración de las ecuaciones de Euler (ecuación 24), para "n" rebanadas, queda:

for n from 3 by 1 to r do

$$f_{n+1} := \left(\begin{array}{l}\left(\psi\left(y_n - y_c\right) + FS\left(x_n - x_c\right)\right)\left(\frac{\left(3\sigma_n - 4\sigma_{n-1} + \sigma_{n-2}\right)}{\left(3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}\right)}\right) \\ -\left(x_n - x_c\right)FS\,pu + 2\left(C + \sigma_n\psi\right)\end{array}\right)$$

end do

Otra característica importante de resaltar es que la ecuación de Euler genera tantas ecuaciones como rebanadas se divida la masa que tiende al deslizamiento. De esta manera si se tiene en cuenta que la masa deslizante se divide en cuatro rebanadas la programación en Maple arroja cuatro ecuaciones.

Finalmente se resuelve el sistema de ecuaciones no lineales mediante el comando '*fsolve*' considerando para este estudio que el número de rebanadas a dividir la masa deslizante s igual a cuatro, se tienen siete ecuaciones y siete incógnitas las cuales son:

- σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, son los esfuerzos normales en el punto medio de cada rebanada.
- FS, representa el factor de seguridad.
- x_c y y_c, es un centro geométrico que se observa en la figura 2.

En la siguiente tabla se puede presentan los resultados obtenidos al resolver el sistema de ecuaciones no lineales:

Tabla 4. Esfuerzos normales, valores de x_c y y_c y Factor de seguridad obtenidos mediante el cálculo de variaciones

Esfuerzos en (kN/m^2)	Valores obtenidos	Esfuerzos adimensionales	Valores obtenidos
σ_1	77,25	$\sigma_1 / \gamma H$	0,64
σ_2	26,20	$\sigma_2 / \gamma H$	0,21
σ_3	4,90	$\sigma_3 / \gamma H$	0,04
σ_4	0,73	$\sigma_4 / \gamma H$	0,006
x_c (m)	0,0419	x_c / H	0,0068
y_c(m)	-0,522	y_c / H	-0,087
FS	1,123	FS	1,123

La relación de los esfuerzos normales en el punto medio de cada rebanada, obtenidos mediante el método de rotación de ejes y el cálculo de variaciones se muestra en la figura 4.

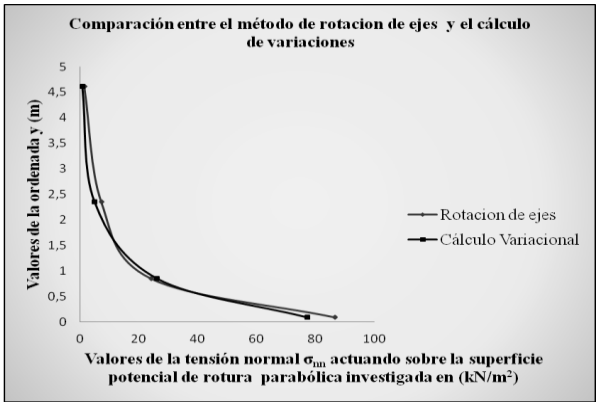


Fig. 4 Relación entre las tensiones normales obtenidos a través del método de rotación de ejes y el cálculo variacional

5 Conclusiones

El método analítico utilizando la técnica de rotación de ejes, es un método aplicado exclusivamente a geometrías ideales, es decir, la geometría del talud está representada por rectas y la superficie de rotura parabólica tiene la característica que comienza en el pie del talud, la cual corresponde a una condición de contorno previamente establecido.

La técnica del cálculo variacional es un método muy versátil, cumple con las condiciones de equilibrio, tiene en cuenta la presión de poros, el efecto sismo, diferentes estratos que generan un sistema de ecuaciones no lineales. Con la ayuda de los métodos numéricos se obtiene la solución a las integrales y al sistema de ecuaciones no lineales. Puede ser utilizado a geometrías irregulares y reales (cualquier forma).

Al comparar ambos métodos se puede decir que respecto a los esfuerzos normales obtenidos a la mitad de cada rebanada los mayores esfuerzos se presentan en el pie del talud siendo ligeramente menor los obtenidos por el cálculo de variaciones, mientras que en la rebanada de la cresta del talud se obtuvo valor mínimo del esfuerzo por método del cálculo de variaciones siendo un valor acertado debido a la verticalidad que presenta la superficie de rotura. Mientras que por el método de rotación de ejes se determinó el esfuerzo exactamente en la cresta (intersección de la superficie potencial de rotura con el plano del talud) obteniéndose un valor negativo muy cercano a cero, debido a los esfuerzos de tracción existente en la zona de la talud.

Con respecto al factor de seguridad calculado en el método de rotación de ejes aplicando la técnica de rebanadas arrojó un valor de 1,128 mientras que para el método del cálculo de variaciones se obtuvo un valor de 1,123 siendo prácticamente similares.

Referencia

Apostol T, 1965, Matemática básica para ingenieros, I Ed., Barcelona: Reverseté S.A.

Baker R, 2005, Variational slope stabilityaAnalysis of materials with nonlinear failure criterion, EJGE.

Baker R, Garber M, 1977, Variational approach to slope stability, Tokio, s.n., pp. 9-12.

Belandria N, Ucar R, 2008, Método analítico para determinar la distribución de los esfuerzos normales y cortantes actuando sobre superficies potenciales de rotura en taludes rocosos, trabajo de Maestría, Universidad de Los Andes Mérida, pp. 187.

Belandria N, Ucar R, Bongiorno F, 2011, Determinación de expresiones matemáticas para el cálculo de los esfuerzos aplicados a la estabilidad de taludes, Ciencia e Ingenieria, Vol. 32, No. 3, pp. 115-122.

Bishop A, 1955, The use of the slip circle in the stability analysis of slopes, Geothechnique, Vol. 5, pp. 7-17.

Castillo E, Revilla J, 1976, Una aplicación del cálculo de variaciones a la estabilidad de taludes, Boletin de Información del Laboratorio del Transporte y Mecánica del Suelo, Issue 115, pp. 3-23.

Chen W, 1975, Limit analysis and soil plasticity, Elselver Scientific Publishing Company, New york.

Fellenius W, 1936, Calculation of stability of earth dams, s.l., s.n., p. 445.

Goncalves R, 1999, Introducción al análisis de esfuerzos, Industria Gráfica Integral C.A, Caracas.

Janbu, 1954, Stability analysis of slopes with dimensionless parameters, Harvard University Cambridge, Massachussetts.

Leshchinsky, Huang, 1992, Generalized slope stability analysis: Interpretation, modification and comparation, Journal of Geotechnical Engineering, Vol. 118, No. 10, pp. 1559-1576.

Mac-Lennan J, 2004, Rotura de un talud, Revista de Obras Públicas, Issue 3446, pp. 53 - 60.

Morgenstern, Price, 1965, The analysis of stability of general slip surfaces, Geotechnique, Vol. 15, pp. 79-93.

Rojas S, Úcar R, 2001, El cálculo variacional en la estabilidad de taludes, Ciencia e Ingeniería, Vol. 22, No. 1, pp. 30-40.

Spencer E, 1967, A Method of analysis for stability of the

embankment using parallel inter-slice forces, Geotechnique, Vol. 17, pp. 11-26.
Ucar R, 2004, Manual de anclajes en ingeniería civil, 1 Ed., Universidad Politecnica de Madrid, pp. 548.

Belandria, Norly*: Ingeniero Geólogo. Magister en Matemática aplicada a la ingeniería. Candidata Ph.D. Coordinadora del grupo de investigación en Geología Aplicada (GIGA). Profesor agregado de la Universidad de los Andes, Mérida-Venezuela.*

Ucar, Roberto: *Ingeniero en Minas. Master en Ingeniería de Rocas, University of Missouri - Rolla. Ph.D. Mc.Gill University (Especialidad en Geotecnia – Obras Subterráneas). Profesor titular jubilado de la Universidad de los Andes, Mérida-Venezuela. Correo electrónico: robertoucar@cantv.net*

Recibido: *11 de noviembre de 2014*

Aceptado: 15 *de junio de 2015*