Artículo de Investigación. Revista Ciencia e Ingeniería. Vol. 38, No. 2, pp. 187-196, Abril-Julio, 2017.
ISSN 1316-7081. ISSN Elect. 2244-8780. Universidad de Los Andes (ULA)

Análisis de la Controlabilidad de Sistemas Descriptores Semi-Lineales

Analysis of the Controllability of Semilinear Descriptor Systems

Levia, Hugo[1]*; Ríos Bolívar, Addison[2]; Tineo Moya, Ambrosio[3]; Narvaez, Miguel[1]
[1]Facultad de Ciencias, Departamento de Matemática
[2]Facultad de Ingeniería, Departamento de Control
Universidad de Los Andes
Mérida, 5101, Venezuela
[3] Núcleo "Rafael Rangel", Departamento de Matemática
Universidad de Los Andes
Trujillo, Venezuela
*hleiva@ula.ve

Resumen

Desde su introducción en 1977, los sistemas descriptores, denominados también sistemas singulares, sistemas de semi-estado, sistemas diferencial-algebraicos o sistemas generalizados de estado-espacio; han sido uno de los campos principales de investigación dentro de la teoría de control. Durante las últimas dos décadas, los sistemas descriptores han atraído mucha atención debido a los usos comprensivos en la economía, como en el modelo dinámico de Leontief, en sistemas eléctricos y los modelos mecánicos. Desde entonces, un considerable progreso ha sido hecho en la investigación de tales sistemas. En este trabajo se estudia la controlabilidad de sistemas descriptores no autónomos semilineales. La condición de controlabilidad es probada por aplicación del teorema de punto fijo de Rothe para un sistema no autónomo semilineal, el cual se obtiene por transformación del sistema descriptor original, a partir de una aplicación inyectiva lineal. En consecuencia, la controlabilidad del sistema no autónomo semilineal es equivalente a la condición de controlabilidad del sistema descriptor no autónomo semilineal.

Palabras clave: Controlabilidad, Sistemas Descriptores, Sistemas no lineales no autónomos, Teorema de punto fijo de Rothe.

Abstract

From its introduction in 1977 by Luenberger, the systems descriptors, denominated also singular systems, semi-state systems, differential-algebraic systems or generalized systems of state space; they have been one of the main fields of the investigation of the control theory. During the two last decades, the systems descriptors have attracted much attention due to the comprehensive uses in the economy, like in the dynamic model of Leontief, electrical systems and mechanical models. Since then, a considerable progress it has been done in the investigation of such systems. In this paper, the controllability of semilinear non-autonomous descriptor systems is studied. The condition of controllability is proven by application of the Rothe's fixed point theorem for a semilinear nonautonomous system, which obtains by transformation of the original descriptor system, from a linear injective application. Consequently, the controllability of the semilinear non-autonomous system is equivalent to the condition of controllability of the semilinear non-autonomous descriptor system.

Key words: Controllability, Descriptor Systems Descriptors, Non-autonomous nonlinear systems, Rothe's fixed point theorem.

1 Introducción

La controlabilidad es uno de los conceptos fundamentales en la teoría de control matemática. Es una propiedad cualitativa de los sistemas dinámicos de control y es de importancia particular en teoría de control moderna. Un estudio sistemático de la controlabilidad fue comenzado al principio de los años 60 en el siglo pasado, por Kalman para los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI = *Linear Time-Invariant*) (Kalman y col., 1963). En general, la controlabilidad se refiere a la posibilidad de dirigir un sistema dinámico de un estado inicial arbitrario a un estado final arbitrario usando controles admisibles, en tiempo finito. Es importante recalcar que se derivan diversas definiciones de la controlabilidad, que dependen, en gran medida, de la clase de sistemas dinámicos y de la forma de los controles admisibles (Klamka 2013).

El análisis de la controlabilidad para diversos tipos de sistemas dinámicos requiere el uso de numerosos conceptos y métodos matemáticos tomados de la geometría y el álgebra diferencial, el análisis funcional, la topología, análisis matricial y teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, y de la teoría de las ecuaciones de diferencia. La controlabilidad desempeña un papel esencial en el desarrollo de la teoría matemática de control moderno. Hay varias relaciones importantes entre la controlabilidad, la estabilidad y la estabilizabilidad de los sistemas de control finito-dimensionales e infinito-dimensionales lineales. La controlabilidad también se relaciona, de manera directa, con la teoría de la realización, en particular con las realizaciones mínimas y las formas canónicas para los sistemas de control LTI. Debe ser mencionado que, para muchos sistemas dinámicos existe una dualidad formal entre los conceptos de controlabilidad y de observabilidad. El concepto de controlabilidad tiene muchos usos importantes, no sólo en teoría de control y teoría de sistemas, sino también en áreas tales como control de procesos industriales, procesos químicos, control de sistemas eléctricos, entre otros.

Así, entre las bases teóricas fundamentales, usadas para el análisis de la controlabilidad de sistemas dinámicos no lineales o semilineales, se encuentran: teorema de mapeo abierto generalizado, teoría espectral de operadores lineales no acotados, teoría lineal de semigrupos para operadores lineales acotados, álgebra de Lie y grupos de Lie, teoremas de punto fijo, teoría de traza completamente positiva, soluciones suaves de las ecuaciones de evolución en espacios de Hilbert y de Banach.

Por otro lado, los sistemas descriptores, denominados también sistemas singulares, sistemas de semi-estado, sistemas diferencial-algebraicos o sistemas generalizados de estado-espacio; han sido uno de los campos principales de la investigación de la teoría de control, desde su introducción en (Luenberger 1977). Durante las últimas dos décadas, los sistemas descriptores han atraído mucha atención debido a los usos comprensivos en la economía, como en el modelo dinámico de Leontief , en sistemas eléctricos y los modelos mecánicos. Desde entonces, un considerable progreso ha sido hecho en la investigación de tales sistemas.

Un sistema descriptor se define por la siguiente dinámica

$$E\dot{y}(t) = F(t)y(t) + B(t)u(t), \quad t \in [0, \tau], \tag{1}$$

donde $y(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de variable descriptor (en vez de vector de estados), $E \in \mathbb{R}^{n\times m}$, con $n \leq m$; y $F(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times l}$, son matrices continuas; la función control u pertenece a $L_2(0, \tau; \mathbb{R}^l)$. Si para todo $t \in [0, \tau]$, el polinomio $p(s) = \det(sE - F)$ satisface que $p(s) \neq 0$, se dice que el par (E, F) es *regular*. En caso contrario, se denomina *singular*.

En el estudio de la controlabilidad para tales sistemas, muchos resultados pueden ser evaluados en (Mehrmann y col., 2006, Berger y col., 2009). En general, los resultados allí mostrados son referidos a sistemas descriptores lineales como (1). Por el contrario, en este artículo se aplica el Teorema de punto fijo de Rothe para probar la controlabilidad del siguiente Sistema Descriptor Semilineal no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$E\dot{y}(t) = F(t)y(t) + B(t)u(t) + g(t, y(t), u(t)), \quad t \in [0, \tau], \tag{2}$$

donde, para la función no lineal $g \in C([0, \tau] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$ tal que

$$\|g(t, y, u)\|_{\mathbb{R}^n} \leq a\|y\|_{\mathbb{R}^n} + b\|u\|^{\beta}_{\mathbb{R}^l} + c, \quad u \in \mathbb{R}^l, y \in \mathbb{R}^n.$$

2 Controlabilidad de un sistema semi-lineal

Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t) + g_\Gamma(t, z, u), & t \in (0, \tau], \\ z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3}$$

donde $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^l$, $A(t)$, $B(t)$ son matrices continuas de dimensiones $n \times n$ y $n \times l$ respectivamente, la función control u pertenece a $L^2(0, \tau; \mathbb{R}^l)$ y la función no lineal $g_\Gamma : [0, \tau] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ es continua y existen constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$ tal que

$$\|g_\Gamma(t, z, u)\|_{\mathbb{R}^n} \leq a\|z\|_{\mathbb{R}^n} + b\|u\|^{\beta}_{\mathbb{R}^l} + c, \quad u \in \mathbb{R}^l, y \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Definición 1 *(**Controlabilidad**) El sistema (3) se dice controlable sobre $[0, \tau]$ si para todo z_0, $z_1 \in \mathbb{R}^n$, existe un control $u \in L_2(0, \tau; \mathbb{R}^l)$ tal que la solución $z_u(t)$ de (3) correspondiente a u verifica:*

$$z(0) = z_0 \quad y \quad z(\tau) = z_1.$$

Bajo las condiciones antes mencionadas, es bien sabido que, para todo $z_0 \in \mathbb{R}^n$ y $u \in L_2(0, \tau; \mathbb{R}^l)$ el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t), & z \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, \tau], \\ z(0) = z_0, \end{cases}$$

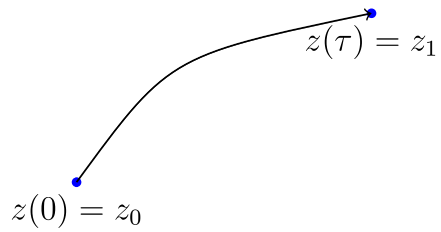

Fig. 1. Caracterización de la controlabilidad.

(5)

admite una única solución dada por

$$z(t) = U(t,0)z_0 + \int_0^t U(t,s)B(s)u(s)ds, \quad t \in [0,\tau], \tag{6}$$

donde $U(t,s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$ y $\Phi(t)$ es la matriz fundamental del sistema lineal autónomo

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t). \tag{7}$$

Es decir, la matriz $\Phi(t)$ satisface:

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \\ \Phi(0) = I_{\mathbb{R}^n}, \end{cases} \tag{8}$$

donde $I_{\mathbb{R}^n}$ es la matriz identidad de orden $n \times n$. Además, existen constantes $M > 0$ y $\omega > 0$ tal que

$$\|U(t,s)\| \leq Me^{\omega(t-s)}, \quad 0 \leq s \leq t \leq \tau. \tag{9}$$

Bajo la condición (4) y si se satisface que

$$\frac{1}{\gamma\sqrt{2}}\|B\|_\infty^2 M^3 a\sqrt{\tau}e^{aM\tau}\left(\frac{e^{2\omega\tau}-1}{\omega}\right)^{\frac{3}{2}} < 1, \tag{10}$$

se demostrará la siguiente afirmación: Si el sistema lineal

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t), \tag{11}$$

es controlable, entonces el sistema semilineal no autónomo (3) es controlable sobre $[0,\tau]$. Más aún, se puede determinar un control que lleva el sistema no lineal de un estado inicial z_0 a un estado final z_1 en un tiempo $\tau > 0$, el cual es muy importante en la práctica y desde un punto de vista numérico. La controlabilidad del sistema lineal (11) es bien conocida y existe una amplia gama de bibliografía acerca de esta condición, incluyendo libros, artículos, y se pueden citar (Chukwu 1992), (Lee y col., 1967) y (Sontag 1998).

A diferencia de los sistemas lineales, la bibliografía no es muy amplia cuando se trata de sistemas semilineales no autónomos, en este sentido se puede mencionar el trabajo realizado por Lukes en (Lukes 1973), donde probó que, si el sistema lineal (11) es controlable, entonces el sistema no lineal (sistema perturbado) es también controlable, probando que la función no lineal g_Γ es acotada. En (Leiva 2014) se prueba la controlabilidad del sistema semilineal no autónomo (3), usando la acotación (4) de la función no lineal g_Γ y asumiendo la controlabilidad de la ecuación (11). El resultado de Lukes aparece en un contexto más general en (Coron 2007) (ver Teorema 3.40 y 3.41 Corolario de (Coron 2007)), pero el término no lineal sigue dependiendo sólo de las variables (t,z). En (Vidyasager 1972) se presenta el caso cuando la función g_Γ no depende del parámetro $u \in \mathbb{R}^m$, y se demuestra la condición de controlabilidad utilizando el teorema de punto fijo de Schauder que establece que para cada par de números positivos (a,c) existe un número $M > 0$ tal que

$$a|g_\Gamma(t,z)| + c \leq M, \quad \text{para} \quad \|z\| \leq M \quad \text{y} \quad t \in [0,\tau], \tag{12}$$

entonces la controlabilidad del sistema lineal (11) es preservada bajo la perturbación de la función no lineal g_Γ; es decir, el sistema no lineal (3) es controlable. En (Dauer 1976) se obtienen varias condiciones suficientes sobre la función g_Γ para la controlabilidad del sistema perturbado (3). En algunos trabajos, la perturbación no lineal g_Γ está sujeta al sistema lineal, lo cual es natural cuando el sistema es perturbado, en ese sentido, mientras que en (Do 1990) se encuentra una condición débil sobre el término no lineal g_Γ para la controlabilidad del sistema (3), conteniendo la condición de Dauer; sin embargo, esta condición depende fuertemente sobre el sistema lineal (11), particularmente, sobre la matriz fundamental $\Phi(t)$ del sistema lineal no controlable (7), el cual es, en general, no viable en forma cerrada. Para la controlabilidad del sistema semilineal de ecuaciones de evolución infinito dimensional, se pueden analizar los resultados de (Balachandran y col., 1987) y (Balachandran y col., 2003).

La controlabilidad nula local, la cual es equivalente a decir que $0 \in \text{int}(\mathcal{C})$, donde $\mathcal{C}$ es el dominio de controlabilidad nula, ha sido estudiada en (Chukwu 1992), (Chukwu 1991), (Chukwu 1987), (Chukwu 1979), (Chukwu 1980), (Chukwu 1984),(Mirza y col., 1972),(Sinha 1985), (Nieto y col., 2010) y (Sinha y col., 1980). Particularmente, en (Chukwu 1992) se estudia la controlabilidad nula local del siguiente sistema no lineal

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = g(t,z(t),u(t)), \quad t \in (0,\tau], \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{13}$$

donde la función no lineal $g : [0,\tau] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es continua y en la segunda y tercera variable es continuamente diferenciable. Con respecto a (13), se considera el sistema linealizado

$$\dot{z}(t) = D_2 g(t,0,0)z(t) + D_3 g(t,0,0)u(t), \tag{14}$$

Teorema 2 *(Teorema 8.1.1 de (Chukwu 1992)) Asúmase que:*

i) g es continua, y en la segunda y tercera variable es continuamente diferenciable.
ii) $g(t, 0, 0) = 0$.
iii) el sistema lineal (14) es controlable.

Entonces el dominio $\mathcal{C}$ *de controlabilidad nula de (13) tiene:* $0 \in Int(\mathcal{C})$

De acuerdo a las indagaciones realizadas, y evaluando los trabajos mencionados en la literatura, la principal hipótesis cuando se estudia la controlabilidad de sistemas semilineales de control gobernados por ecuaciones diferenciales, es que el sistema lineal asociado es controlable, entonces la controlabilidad del sistema semilineal dependerá de la perturbación $g(t, z, u)$ aplicada a sistemas lineales. En ese sentido, el tipo de perturbación utilizada en este trabajo no se había considerado anteriormente; esto, unido a la técnica utilizada, forma parte de la novedad de este trabajo.

Finalmente, la controlabilidad del sistema (3) se sigue de la controlabilidad de (11), la continuidad de la matriz fundamental del sistema lineal no controlado y la condición (4) que satisface el término g_Γ y la aplicación de los siguientes resultados:

Proposition 3 *Sea* (X, Σ, μ) *el espacio de medida con* $\mu(X) < \infty$ *and* $1 \leq q < r < \infty$. *Entonces* $L_r(\mu) \subset L_q(\mu)$ *y*

$$\|f\|_q \leq \mu(X)^{\frac{r-q}{rq}} \|f\|_r, \;\; f \in L_r(\mu). \tag{15}$$

Prueba. La prueba del la Proposición se sigue del Teorema I.V.6 de (Brezis 1984) y asumiendo que $p = \frac{r}{q} > 1$ y considerando la relación

$$\int_X (|f|^q)^p d\mu = \int_X |f|^r d\mu, \;\; \forall f \in L_r(\mu).$$

Teorema 4 *([(Isac 2004),(Smart 1974)]) Sea* E *un espacio de Banach y sea* $B \subset E$ *un subconjunto cerrado y convexo tal que el cero de* E *está contenido en el interior de* B.
Sea $\Phi : B \to E$ *una función continua con* $\Phi(B)$ *relativamente compacta en* E *y* $\Phi(\partial B) \subset B$.
Entonces existe un punto $x^* \in B$ *tal que* $\Phi(x^*) = x^*$.

3 Resultados principales: Controlabilidad de un sistema descriptor semilineal

Aplicando el Teorema 4 de punto fijo de Rothe, se busca probar la controlabilidad del siguiente sistema

$$E\dot{y}(t) = F(t)y(t) + B(t)u(t) + g(t, y(t), u(t)), \quad t \in [0, \tau], \tag{16}$$

Para ello, supóngase que:

1) $det(EE^\star) \neq 0$
2) La función no lineal $g \in C([0, \tau] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ y existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$ tal que

$$\|g(t, y, u)\|_{\mathbb{R}^n} \leq a\|y\|_{\mathbb{R}^n} + b\|u\|^\beta_{\mathbb{R}^l} + c, \quad u \in \mathbb{R}^l, y \in \mathbb{R}^n.$$

Bajo las condiciones anteriores se tiene que:

$$\Gamma = E^\star(EE^\star)^{-1}$$

es una inversa por la derecha de E, es decir:

$$E \circ \Gamma = I.$$

El sistema (16) no es cuadrado y las soluciones del problema de valor inicial

$$\begin{cases} E\dot{y}(t) = F(t)y(t) + B(t)u(t) + g(t, y(t), u(t)), \; t \in (0, \tau], \\ y(0) = y_0 \in Ran(\Gamma), \end{cases} \tag{17}$$

no tienen porque ser únicas.

Considérese el siguiente cambio de variable

$$y(t) = \Gamma z(t), \text{ entonces } \dot{y}(t) = \Gamma \dot{z}(t) \text{ y } y_0 = \Gamma z_0.$$

Como Γ es una inversa por la derecha de E, sustituyendo el cambio en la ecuación (16) se tiene:

$$\dot{z}(t) = F(t)\Gamma z(t) + B(t)u(t) + g(t, \Gamma z(t), u(t)).$$

Ahora, si $A(t) = F(t)\Gamma$ y $g_\Gamma(t, z, u) = g(t, \Gamma z, u)$, y haciendo los cambios, se obtiene el siguiente sistema semilineal lineal:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t) + g_\Gamma(t, z(t), u(t)), \quad t \in (0, \tau], \\ z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{18}$$

La aplicación $E^\star$ es inyectiva, lo que implica que $Ran(E^\star) \cong \mathbb{R}^n$, así, el $Ran(\Gamma) = \mathbb{R}^n$.

Así, se estudiará la controlabilidad del sistema (16) restringido a $Ran(\Gamma) = \mathbb{R}^n$, es decir, se analiza la controlabilidad del sistema (18).

Bajo condiciones adicionales, se probará la siguiente afirmación: Si el sistema lineal $\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t)$ es controlable sobre $[0, \tau]$, entonces el sistema descriptor semilineal es también controlable sobre $[0, \tau]$. Más aún, es posible determinar un control que transfiera el sistema (18) de un punto inicial z_0 hasta un punto final z_1 en un tiempo $\tau > 0$.

En consecuencia, se probará la controlabilidad del sistema no lineal (3), probando que el sistema lineal (11) es controlable. Para esto, se considera para todo $z_0 \in \mathbb{R}^n$ y $u \in L_2(0, \tau; \mathbb{R}^l)$, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t) + g_\Gamma(t, z(t), u(t)), \quad t \in (0, \tau], \\ z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{19}$$

que admite como solución la ecuación dada por

$$\begin{aligned} z_u(t) &= U(t,0)z_0 + \int_0^t U(t,s)B(s)u(s)ds \qquad (20) \\ &+ \int_0^t U(t,s)g_\Gamma(s, z_u(s), u(s))\, ds, \;\; t \in [0, \tau]. \end{aligned}$$

Lema 1 *La solución del problema de valor inicial (19) satisface la siguiente estimación*

$$\begin{aligned}\|z(t)\| &\leq \Big\{K + \int_0^\tau \|B\|_\infty M e^{\omega(\tau-s)}\|u(s)\|ds \quad (21)\\ &+ \int_0^\tau b\, M e^{\omega(\tau-s)}\|u(s)\|^\beta ds\Big\} e^{aM\tau},\end{aligned}$$

donde $\|B\|_\infty = \sup_{0\leq t\leq\tau}\|B(t)\|$ *y* $K = M\|z_0\| + \int_0^\tau cMe^{-\omega s}ds$.

Comentario 5 *Sin pérdida de generalidad, se puede suponer, cuando sea necesario, que el estado inicial* $z_0 = 0$ *es fijo y* $c = 0$.

Definición 6 *Para los sistemas (11) y (3) se definen los siguientes conceptos: Los operadores de controlabilidad (para* $\tau > 0$*)* $G, G_{g_\Gamma} : L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *están dados por*

$$Gu = \int_0^\tau U(\tau,s)B(s)u(s)ds, \tag{22}$$

y

$$\begin{aligned}G_{g_\Gamma}u &= \int_0^\tau U(\tau,s)B(s)u(s)ds + \\ &\int_0^\tau U(\tau,s)g_\Gamma(s,z_u(s),u(s))ds, \quad (23)\end{aligned}$$

donde $z_u(\cdot)$ *es la única solución del problema de valor inicial (19).*

El operador adjunto $G^\star : \mathbb{R}^n \longrightarrow L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l)$ del operador G esta dado por

$$(G^\star z)(s) = B^\star(s)U^\star(\tau,s)z, \quad \forall s\in[0,\tau], \quad \forall z\in\mathbb{R}^n. \tag{24}$$

Proposition 7 *Los sistemas (11) y (3) son controlables en* $[0,\tau]$ *si y sólo si,* $\mathrm{Rang}(G) = \mathbb{R}^n$ *y* $\mathrm{Rang}(G_{g_\Gamma}) = \mathbb{R}^n$ *respectivamente.*

Además, se utiliza el siguiente resultado de (curtain y col., 1978),pp 55, y (Curtain y col., 1995).

Lema 2 *Sean* Y *y* Z *espacios Hilbert,* $S \in L(Y,Z)$ *y* $S^* \in L(Z,Y)$ *el operador adjunto. Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen,*

(i) $\mathrm{Rang}(S) = Z \iff \exists\gamma > 0 \;\;/\;\; \|S^\star z\|_W \geq \gamma\|z\|_Z$, $z\in Z$.

(ii) $\overline{\mathrm{Rang}(S)} = Z \iff Ker(S^\star) = \{0\} \iff S^\star$ *is* $1-1$.

Lema 3 *(Ver (Iturriaga y col., 2010)) Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

a) $\mathrm{Rang}(S) = Z$.
b) $Ker(S^*) = \{0\}$.
c) $\exists\gamma > 0 \;\;/\;\; \langle SS^\star z, z\rangle > \gamma\|z\|^2$, $z \neq 0$ *in* Z.
d) $\exists(SS^\star)^{-1} \in L(Z)$.

Por lo tanto, $(GG^\star)^{-1}$ existe y el operador $\Gamma : \mathbb{R}^n \to L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l)$ definido por

$$\Gamma z = B^\star(\cdot)U^\star(\tau,\cdot)(GG^\star)^{-1}z = G^\star(GG^\star)^{-1}z, \tag{25}$$

es una inversa por la derecha del operador G, en el sentido que

$$G\Gamma = I. \tag{26}$$

Más aún,

$$\|(GG^\star)^{-1}z\| \leq \gamma^{-1}\|z\|, \quad z\in\mathbb{R}^n. \tag{27}$$

Por otro lado, el operador $\Gamma : \mathbb{R}^n \to L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l)$ definido por la ecuación (23) puede ser escrito de la siguiente manera:

$$G_{g_\Gamma}u = G(u) + H(u), \tag{28}$$

donde $H : L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l) \to \mathbb{R}^n$ es un operador no lineal dado por

$$H(u) = \int_0^\tau U(\tau,s)g_\Gamma(s,z_u(s),u(s))ds, u \in L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l) \tag{29}$$

Definición 8 *La siguiente ecuación se denomina ecuación de controlabilidad asociada a la ecuación no lineal (3)*

$$u = \Gamma(z - H(u)) = G^*(GG^*)^{-1}(z - H(u)), \quad t\in[0,\tau]. \tag{30}$$

Ahora, se presenta y probará el resultado principal de este trabajo, que es la controlabilidad del sistema no lineal (3).

Teorema 9 *Si el sistema lineal (11) es controlable en* $[0,\tau]$ *y si se satisface la condición (10), entonces el sistema (3) es controlable en* $[0,\tau]$*. Más aún, se determina un control que lleva el sistema (3) de un punto inicial* z_0 *a un punto final* z_1 *en un tiempo* $\tau > 0$*. Tal control, para* $t\in[0,\tau]$*, está dado por*

$$u(t) = B^*(t)U^*(\tau,t)(GG^*)^{-1}(z_1 - U(\tau,0)z_0 - H(u)). \tag{31}$$

Prueba. Para cada $z\in\mathbb{R}^n$ fijo, se considera el siguiente operador auxiliar
$K : L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l) \to L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l)$ dado por

$$K(u) = \Gamma(z - H(u)) = G^*(GG^*)^{-1}(z - H(u)). \tag{32}$$

En primer lugar, se demostrará que el operador K tiene un punto fijo u dependiendo de z. En efecto, ya que el operador de evolución $U(t,s)$ es continuo (en este caso por la compacidad $\mathrm{Rang}(U(t,s)) = \mathbb{R}^n$), la suavidad y la condición (4) que satisface el término no lineal g_γ, se deriva que el operador

H es compacto.
Más aún,

$$\overline{\text{lím}}_{\|u\|_{L_2}\to\infty}\frac{\|K(u)\|_{L_2}}{\|u\|_{L_2}} \leq \frac{M^2}{\omega}a\sqrt{\tau}\|B\|_\infty e^{aM\tau}(e^{2\omega\tau}-1). \tag{33}$$

En efecto, de (4), (21), de la definición del operador $H(u)$ y de la Proposición 3, se obtiene que, para $u \in L_2(0,\tau;\mathbb{R}^l)$, la siguiente estimación

$$\begin{aligned}
\|H(u)\| &\leq \int_0^\tau Me^{\omega(\tau-s)}\|g_\Gamma(s,z_u(s),u(s))\|ds,\\
&\leq \left(\int_0^\tau M^2e^{2\omega(\tau-s)}ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad \left(\int_0^\tau \|g_\Gamma(s,z_u(s),u(s))\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= N\left(\int_0^\tau \|g_\Gamma(s,z_u(s),u(s))\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq N\left(\int_0^\tau \left(a\|z(s)\|+b\|u(s)\|^\beta\right)^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq N\left(\int_0^\tau (4a^2\|z(s)\|^2+4b^2\|u(s)\|^{2\beta})ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq 2Na\left(\int_0^\tau \|z(s)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\\
&\quad 2Nb\left(\int_0^\tau \|u(s)\|^{2\beta}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2Na\left(\int_0^\tau\left\{\int_0^\tau \|B\|_\infty Me^{\omega(\tau-r)}\|u(r)\|dr+\right.\right.\\
&\qquad \left.\left.\int_0^\tau bMe^{\omega(\tau-r)}\|u(r)\|^\beta dr\right\}^2 e^{2aM\tau}\right)^{\frac{1}{2}}ds\\
&+ 2Nb\left\{\left(\left(\int_0^\tau \|u(s)\|^{2\beta}\right)^{\frac{1}{2\beta}}\right)^\beta\right\}\\
&\leq 2Na\sqrt{\tau}\left\{\int_0^\tau \|B\|_\infty Me^{\omega(\tau-s)}\|u(s)\|ds+\right.\\
&\qquad \left.\int_0^\tau bMe^{\omega(\tau-s)}\|u(s)\|^\beta ds\right\}e^{aM\tau}+2Nb\|u\|^\beta_{L_{2\beta}}\\
&= 2N^2a\sqrt{\tau}\|B\|_\infty e^{aM\tau}\|u\|_{L_2}+\\
&\quad (2N^2ab\sqrt{\tau}e^{aM\tau}+2Nb)\|u\|^\beta_{L_{2\beta}},
\end{aligned}$$

donde $L_{2\beta}=L_{2\beta}(0,\tau;\mathbb{R}^l)$ y $N=\left(\int_0^\tau M^2e^{2\omega(\tau-s)}ds\right)^{\frac{1}{2}}$. Ahora, como $\frac{1}{2}\leq\beta<1 \Leftrightarrow 1\leq 2\beta<2$, aplicando la Proposición 3, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\|H(u)\| &\leq 2N^2a\sqrt{\tau}\|B\|_\infty e^{aM\tau}\|u\|_{L_2}\\
&+ 2Nb\tau^{\frac{1-\beta}{2}}(Na\sqrt{\tau}e^{aM\tau}+1)\|u\|^\beta_{L_2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\overline{\text{lím}}_{\|u\|_{L_2}\to\infty}\frac{\|H(u)\|_{L_2}}{\|u\|_{L_2}} \leq \frac{M^2}{\omega}a\sqrt{\tau}\|B\|_\infty e^{aM\tau}(e^{2\omega\tau}-1).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\overline{\text{lím}}_{\|u\|_{L_2}\to\infty}\frac{\|K(u)\|}{\|u\|_{L_2}} &\leq \|G^*(GG^*)^{-1}\|\frac{M^2}{\omega}a\sqrt{\tau}\\
&\quad \|B\|_\infty e^{aM\tau}(e^{2\omega\tau}-1),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\overline{\text{lím}}_{\|u\|_{L_2}\to\infty}\frac{\|K(u)\|}{\|u\|_{L_2}} &\leq \frac{1}{\gamma\sqrt{2}}\|B\|^2_\infty M^3a\sqrt{\tau}e^{aM\tau}\\
&\quad \left(\frac{e^{2\omega\tau}-1}{\omega}\right)^{\frac{3}{2}}=R<1.
\end{aligned}$$

Entonces, de la condición (33) se sigue que, para un ρ fijo, cumpliendo la siguiente condición, $R<\rho<1$, existe $R_0>0$ suficientemente grande tal que

$$\|K(u)\|_{L_2}\leq\rho\|u\|_{L_2},\ \ \|u\|_{L_2}=R_0.$$

Por lo tanto, si se denota por $B(0,R_0)$ la bola de centro cero y radio $R_0>0$, se obtiene que $K(\partial B(0,R_0))\subset B(0,R_0)$. Como K es un operador compacto, definido en la esfera $\partial B(0,R_0)$ al interior de la bola $B(0,R_0)$, se puede utilizar el Teorema de punto fijo de Rothe's 4 para asegurar la existencia de un punto fijo $u\in B(0,R_0)\subset L_2(0,\tau;\mathbb{R}^m)$ tal que

$$u=\Gamma(z-H(u))=G^*(GG^*)^{-1}(z-H(u)).$$

Entonces,

$$Gu=G\Gamma(z-H(u))=z-H(u),$$

y

$$Gu+H(u)=z.$$

Así, si se toma $z=z_1-U(\tau,0)z_0$ y usando (20), se obtiene

$$\begin{aligned}
z_1 &= U(\tau,0)z_0+\int_0^\tau U(\tau,s)B(s)u(s)ds\\
&+ \int_0^\tau U(\tau,s)g_\Gamma(s,z_u(s),u(s))ds
\end{aligned}$$

Corollary 10 *Si el sistema lineal (11) es controlable en* $[0,\tau]$ *y a, o* $\|B\|_\infty$ *son lo suficientemente pequeño, entonces el sistema (3) es controlable en* $[0,\tau]$*. Más aún, se determina un control que lleva el sistema (3) de un punto inicial* z_0 *a un punto final* z_1 *en un tiempo* $\tau>0$*, el cual, para* $t\in[0,\tau]$*, está dado por*

$$u(t)=B^*(t)U^*(\tau,t)(GG^*)^{-1}(z_1-U(\tau,0)z_0-H(u)). \tag{34}$$

4 Ejemplo numérico

Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + x_4 \\ \dot{x}_2 = x_5 \\ \dot{x}_3 = x_6 \\ m_1\dot{x}_4 + m_2\dot{x}_5 = u_1 \\ m_2\dot{x}_6 = -2x_3 - u_2 \quad . \end{cases} \tag{35}$$

El cual se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Así, para

$E\dot{x} = Fx + Bu$

se tiene $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix}$,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora,

$$E^\star = E^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$E \cdot E^\star = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1^2 + m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2^2 \end{pmatrix}.$$

De allí se obtiene que $(E \cdot E^\star)^{-1}$ existe y esta dada por

$$(E \cdot E^\star)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1^2+m_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_2^2} \end{pmatrix},$$

Por lo tanto

$$E^\star \cdot (E \cdot E^\star)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m_1}{m_1^2+m_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m_2}{m_1^2+m_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} \end{pmatrix}.$$

$\Gamma = E^\star \cdot (E \cdot E^\star)^{-1}$, es una inversa a la derecha de E, es decir $E \circ \Gamma = I$.

Del cambio $x = \Gamma \cdot z$, se tiene $\dot{x} = \Gamma\dot{x}$, entonces

$\dot{z} = Az + Bu$

donde

$$A = F\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{m_1}{m_1^2+m_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m_2}{m_1^2+m_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, la matriz de controlabilidad de Kalman:

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & A^3B & A^4B \end{pmatrix}$$

está dada por

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{m_1}{m_1^2+m_2^2} & 0 & 0 & \frac{-1}{m_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{m_2^2} \\ 0 & 0 & \frac{m_2}{m_1^2+m_2^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{m_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{m_2^2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{m_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-4}{m_2^2} \end{pmatrix};$$

donde se verifica que Rank$(\mathfrak{C}) = 5$. Por lo tanto, el par (A, B) es completamente controlable. En consecuencia, es sistema descriptor original es controlable.

4.1 Ejemplo 2: Péndulo invertido

Consideremos el modelo de estabilización de un péndulo invertido descrito en (Furuta y col., 1988):

$$\begin{aligned} (J + ml^2)\ddot{\theta} + (ml\cos(\theta))\ddot{x} &= -c_p\dot{\theta} + mlg\sin(\theta) \\ (M + m)\ddot{x} + (ml\cos(\theta))\ddot{\theta} &= -c_c\dot{x} + (ml\sin(\theta))\dot{\theta}^2 + u \end{aligned}$$

donde las variables físicas se definen según la Fig. 2. Así, l es el centro de masa del péndulo ($2l = L$); c_p, c_c son

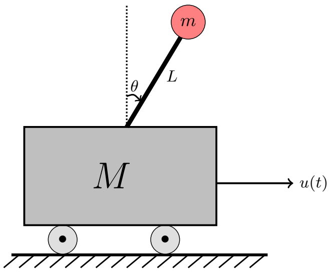

Fig. 2. Péndulo invertido

coeficientes de fricción, $J = \frac{ml^3}{3}$. Considerando θ pequeño, entonces las aproximaciones $\sin(\theta) = \theta$, $\cos(\theta) = 1$ son válidas. Tomando las variables de estado $x_1 = x$, $x_2 = \theta$, $x_3 = \dot{x}$ y $x_4 = \dot{\theta}$ entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ml & J+ml^2 \\ 0 & 0 & M+m & ml \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & mlg & 0 & -c_p \\ 0 & 0 & -c_c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ mlx_2x_4^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Nótese que en este caso la función no lineal $g(\mathbf{x})$ corresponde a $g(\mathbf{x}) = (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; mlx_2x_4^2)^T$, la cual depende del ángulo y la velocidad angular del péndulo, que son variables acotadas, por lo que se satisface la condición de acotamiento de esta función no lineal. Así, para estudiar la controlabilidad de este sistema descriptor semi-lineal, se aplican los resultados teóricos obtenidos. Por lo tanto,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-ml}{\Delta} & \frac{J+ml^2}{\Delta} \\ 0 & 0 & \frac{M+m}{\Delta} & \frac{-ml}{\Delta} \end{pmatrix},$$

donde $\Delta = Mml^2 + J(m+M)$. Aplicando la transformación, se obtiene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-ml}{\Delta} & \frac{J+ml^2}{\Delta} \\ 0 & 0 & \frac{M+m}{\Delta} & \frac{-ml}{\Delta} \\ 0 & mlg & \frac{-c_p(M+m)}{\Delta} & \frac{c_pml}{\Delta} \\ 0 & 0 & \frac{c_cml}{\Delta} & \frac{-c_c(J+ml^2)}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Puesto que

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

la controlabilidad del sistema lineal se analiza a partir de la condición de Kalman.

Así, la matriz de controlabilidad es de la forma:

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{J+ml^2}{\Delta} & \frac{-c_c(J+ml^2)^2 - c_pm^2l^2}{\Delta^2} & \mathfrak{c}_{14} \\ 0 & \frac{-ml}{\Delta} & \frac{c_pml(m+M)+c_clm(J+ml^2)}{\Delta^2} & \mathfrak{c}_{24} \\ 0 & \frac{c_pml}{\Delta} & \frac{-gm^2l^2}{\Delta} - \frac{c_p^2ml(m+M)+c_pc_cml(J+ml^2)}{\Delta^2} & \mathfrak{c}_{34} \\ 1 & \frac{-c_c(J+ml^2)}{\Delta} & \frac{c_c^2(J+ml^2)^2+c_pc_cl^2m^2}{\Delta^2} & \mathfrak{c}_{44} \end{pmatrix},$$

donde,

$$\mathfrak{c}_{14} = \frac{g\,l^3\,m^3}{\Delta^2} + c_c\,\left(m\,l^2 + J\right)\left[\frac{c_c\left(m\,l^2+J\right)^2}{\Delta^3} + \frac{c_p\,l^2\,m^2}{\Delta^3}\right] + \frac{cp^2\,l^2\,m^2\,(M+m)}{\Delta^3} + \frac{c_pc_c\,l^2\,m^2\,\left(m\,l^2+J\right)}{\Delta^3}.$$

$$\mathfrak{c}_{24} = -\,c_c(J+ml^2)\left[\frac{c_pml(m+M)}{\Delta^3} + \frac{c_clm(J+ml^2)}{\Delta^3}\right] - \frac{gm^2l^2(m+M)}{\Delta^2} - c_plm\left[\frac{c_p(M+m)^2}{\Delta^3} + \frac{-c_cl^2m^2}{\Delta^3}\right].$$

$$\mathfrak{c}_{34} = c_c(ml^2+J)\left[\frac{gl^2m^2}{\Delta^2} + \frac{c_p^2lm}{\Delta^3} + \frac{c_pc_clm(ml^2+J)}{\Delta^3}\right] + c_plm\left[\frac{c_p^2(M+m)^2}{\Delta^3} + \frac{c_pc_cl^2m^2}{\Delta^3} + \frac{gml(m+M)}{\Delta^2}\right] + \frac{c_pgl^2m^2(m+M)}{\Delta^2}.$$

$$\mathfrak{c}_{44} = -\,c_c(ml^2+J)\left[\frac{c_c^2(ml^2+J)^2}{\Delta^3} + \frac{c_pc_cl^2m^2}{\Delta^3}\right] - \frac{c_cgl^3m^3}{\Delta^2} - c_plm\left[\frac{c_c^2lm(ml^2+J)}{\Delta^3} + \frac{c_pc_clm(m+M)}{\Delta^3}\right] + \frac{c_pgl^2m^2(m+M)}{\Delta^2}.$$

De acuerdo a las variables físicas del modelo, se puede verificar que la matriz de controlabilidad $\mathfrak{C}$ tiene rango completo. En consecuencia, se determina que el sistema lineal es completamente controlable. Por lo tanto, el sistema semilineal será controlable.

5 Comentarios concluyentes

A partir del análisis de la controlabilidad de sistemas semilineales, se ha presentado un estudio de la controlabilidad de sistemas descriptores semi-lineales. La condición de controlabilidad para el sistema descriptor semilineal se obtiene por transformación de dicho sistema, a un sistema semilineal mediante una aplicación lineal correspondiente a una pseudo inversa. Luego, bajo condiciones de acotación relativa, se establece la condición de controlabilidad, siguiendo el teorema de punto fijo de Rothe. Al contrario de resultados previos, donde la hipótesis principal, cuando se estudia la controlabilidad de sistemas semilineales de control gobernados por ecuaciones diferenciales, es que el sistema lineal asociado es controlable y que la perturbación no lineal está sujeta al sistema lineal, en el resultado presentado la controlabilidad del sistema semilineal dependerá de la perturbación aplicada al sistema lineal por condición de acotamiento, lo cual es utilizado, conjuntamente con el teorema de punto fijo de Rothe, para la verificación de la controlabilidad de sistemas descriptores semilineales.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el CDCHTA de la Universidad de Los Andes, a través del proyecto *No*. **I-1302-12-02-B**, por lo que gratamente se reconoce este soporte.

Referencias

Balachandran K, Dauer J. P, 1987, Controllability of perturbed nonlinear delay systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 32:pp. 172–174.

Balachandran K, Dauer J. P, Sangeetha S, 2003, Controllability of nonlinear evolution delay integrodifferential systems. *Appl. Math. Comput.*, 139:pp. 63–84.

Berger T, Reis T, 2009, Controllability of linear differential-algebraic systems - a survey. Technical report, Institut für Mathematik, Technische Universität Ilmenau, Germany.

Brezis H, 1984, *Analisis Funcional, Teoria y Applicaciones*. Alianza Editorial, Madrid.

Chukwu E. N, 1979, Controllability of delay systems with restrained controls. *Optim. Theo. Appl.*, 29:pp. 301–320.

Chukwu E. N, 1980, On the null-controllability of nonlinear delay systems with restrained controls. *Math. Anal. Appl.*, 76:pp. 283–296.

Chukwu E. N, 1984, Null controllability in function space of nonlinear retarded systems with limited control. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 103:pp. 198–210.

Chukwu E. N, 1987, Global null controllability of nonlinear delay equations with controls in a compact set. *Optim. Theo. Appl.*, 53:pp. 43–57.

Chukwu E. N, 1991, Nonlinear delay systems controllability. *Math. Anal. Appl.*, 162:pp. 564–576.

Chukwu E. N, 1992, Stability and time-optimal control of hereditary systems. *Mathematics in Science and Engineering*, 188.

Coron J.-M, 2007, Control and nonlinearity. *Mathematical Surveys and Monographs*, 136.

curtain R, Pritchard A, 1978, *Infinite Dimensional Linear Systems*. Lecture Notes in Control and Information Science. Springer Verlag, Berlin.

Curtain R, Zwart H, 1995, *An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory*, volume 21 of *Text in Applied Mathematics*. Springer Verlag, New York.

Dauer J, 1976, Nonlinear perturbation of quasilinear control systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 54(3):pp. 717–725.

Do V, 1990, Controllability of semilinear systems. *J. Optim. Theory Appl.*, 65(1):pp. 41–52.

Furuta K, Sano A, Atherton D, 1988, *State Variable Methods in Automatic Control*. John Wiley & Sons.

Isac G, 2004, On Rothe's fixed point theorem in general topological vector space. *An. St. Univ. Ovidius Constanta*, 12(2):pp. 127–134.

Iturriaga E, Leiva H, 2010, A characterization of semilinear surjective operators and applications to control problems. *Applied Mathematics*, 1:pp. 137–145.

Kalman R. E, Ho Y.-C, Narendra K. S, 1963, Controllability of linear dynamical systems. *Contributions to differential equations*, 1(2):pp. 189–213.

Klamka J, 2013, Controllability of dynamical systems. a survey. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, 61(2):pp. 335–342.

Lee E. B, Markus L, 1967, *Foundations of Optimal Control Theory*. Wiley, New York.

Leiva H, 2014, Rothe's fixed point and controllability of semilinear nonauntonomous systems. *Systems & Control Letters*, 67:pp. 14–18.

Luenberger D. G, 1977, Dynamic equations in descriptor form. *IEEE Trans. Automat. Control*, 22(3):pp. 312–321.

Lukes D, 1973, Global controllability of nonlinear systems. *SIAM J. Control Optim.*, 10(1):pp. 112–126.

Mehrmann V, Stykel T, 2006, Descriptor systems: A general mathematical framework for modelling, simulation and control. Technical report, Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin,, Germany.

Mirza K. B, Womack B. F, 1972, On the controllability of nonlinear time-delay systems. *IEEE Trans. Auto. Control*, pages 812–814.

Nieto J, Tisdell C, 2010, On exact controllability of first-order impulsive differential equations. *Advances in Difference Equations*.

Sinha A. S. C, 1985, Null-controllability of non-linear infinite delay systems with restrained controls. *Int. J. Control*, 42:pp. 735–741.

Sinha A. S. C, Yokomoto C. F, 1980, Null controllability of a nonlinear system with variable time delay. *IEEE Trans. Auto. Control*, 25:pp. 1234–1236.

Smart D, 1974, *Fixed Point Theorems*. Cambridge University Press.

Sontag E. D, 1998, *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*. Springer, New York.

Vidyasager M, 1972, A controllability condition for nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 17:pp. 569–570.

***Recibido**: 13 de febrero de 2016*

***Aceptado**: 25 de noviembre de 2016*

Leiva, Hugo: *Profesor Titular en la Universidad de Los Andes. Ha publicado mas de 400 artículos científicos en Revistas, Libros y Actas de conferencias. Conferencista internacional.*

Ríos Bolívar, Addison: *Profesor Titular en la Universidad de Los Andes. Ha publicado mas de 300 artículos científicos en Revistas, Libros y Actas de conferencias. e-mail: ilich@ula.ve.*

Tineo Moya, Ambrosio: *Doctor en Ciencias Aplicada, Universidad de los Andes, 2013. Profesor Titular. Conferencista nacional e internacional. e-mail: atemoya@ula.ve.*

Narvaez, Miguel: *Profesor Asociado en la Universidad de Los Andes. Doctor en Matemáticas, ULA, 2013. Ha publicado mas de 15 artículos científicos en Revistas, Libros y Actas de conferencias. e-mail: mnarvaez@ula.ve.*