Economía, XXXVII, 34 (julio-diciembre, 2012), pp. 11-32
ISSN 1315-2467, Depósito legal pp: 198702me336

La interacción entre el multiplicador y el acelerador: Una aproximación para Colombia

The interaction between the multiplier effect and the acceleration principle: An approximation for Colombia

José Reyes Bernal Bellón* y Carlos Arturo Meza Carvajalino**

Código JEL: E22, 039, 057

Recibido: 25/07/2012, Revisado: 14/10/2012, Aceptado: 29/11/2012

Resumen

Este trabajo rescata el uso del multiplicador y el acelerador en la teoría del crecimiento económico y en la determinación de la renta y se realizan estimaciones desde los dos enfoques para mostrar su aplicabilidad y poder de predicción. Las diferentes estimaciones para Colombia sugieren que su aplicabilidad es más contundente para predecir la tasa de crecimiento de la economía que en modelos de determinación del ingreso.

Palabras clave: crecimiento económico, renta, propensión marginal a consumir, multiplicador, acelerador.

Abstract

This paper describes the use of the multiplier and the acceleration principle in the theories of economic growth and income determination. Estimates are obtained for the two approaches to show their applicability and predictive power. The different estimates for Colombia suggest that their applicability is more robust in the prediction of the rate of economic growth than in models of income determination.

Keywords: economic growth, income, marginal propensity to consume, multiplier, accelerator.

* PhD en Ciencias Económicas Universidad Nacional, profesor del programa de Maestría en Ciencias Económicas de la Universidad Santo Tomás. Carrera. 82 No. 77BB-27 Medellín-Colombia. Correo electrónico: josereyes@usantotomas.edu.co.

** Economista, Msc. en Ciencias Económicas y Msc. en Planificación y Administración del Desarrollo Regional. Estudiante de Doctorado en Agrociencias de la Universidad de La Salle. Docente de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, Programa de Economía, de la Universidad de La Salle. Profesor en la Maestría de Ciencias Económicas de la Universidad Santo Tomás Carrera. 82 No. 77BB-27 Medellín-Colombia. Correo electrónico: cmeza@unisalle.edu.co.

1. Introducción

Los conceptos de multiplicador y acelerador tienen mucha tradición en la literatura económica sobre la determinación de la renta y el crecimiento económico. El modelo de Harrod (1939) y el modelo de Domar (1946) hacen uso implícita o explícitamente de estos dos elementos teóricos, mientras que en la determinación del ingreso o de la renta el trabajo de Samuelson (1939) y la utilización en el modelo IS-LM muestran claramente la aplicación del multiplicador y el acelerador.

El concepto del multiplicador fue inventado por Kahn, un alumno brillante de Keynes. Este multiplicador está determinado por la propensión marginal a consumir y refleja el cambio en la renta ante incrementos en la inversión, mientras que el acelerador establece una relación directa entre la inversión y la renta, es decir, que incrementos en la renta conducen a incrementos en la inversión. El uso del modelo de Harrod llegó a popularizarse y aún es popular porque su simplicidad condujo a predicciones fuertes sobre el crecimiento del producto. Este crecimiento estaba relacionado directamente con la participación de la inversión en el producto. En muchos países se ha implementado para cuantificar los requerimientos de inversión a fin de obtener unas metas de crecimiento preestablecidas. El mismo Banco Mundial lo ha utilizado como un modelo para observar cuáles países tenían problemas de deuda y financiamiento. A esta versión del modelo se le denominó el Modelo Estándar Mínimo (MSM). Posteriormente, fue revisado por los economistas del mismo Banco y lo denominaron el Modelo Estándar Mínimo Revisado (RMSM) en el que la tasa de crecimiento del Producto Interno Bruto (PIB) era igual a la inversión como proporción del PIB (rezagado un año) y dividido por la relación capital producto. En este caso se buscaban metas de crecimiento para la reducción de la pobreza o la creación de empleo.

A finales de la década del noventa y aún hoy en día, el modelo de Harrod es utilizado por algunas organizaciones internacionales empezando por el Banco Mundial, que lo utiliza para hacer proyecciones en cerca del 90% de los países en desarrollo. En este periodo se hicieron otras modificaciones al modelo para analizar los balances fiscales y monetarios. A esta nueva versión del modelo se le denominó el Modelo Estándar Mínimo Revisado Extendido (RMSM-X) y fue aplicado en Guyana, Uganda, Lituania y en la mayoría de países de Latinoamérica por parte del Banco Mundial. De igual manera, fue y es utilizado por el Banco Interamericano de Desarrollo y por el Banco Europeo para la Reconstrucción y el Desarrollo para proyectar los requerimientos de inversión en los países anteriormente comunistas.

Para demostrar los usos y validez de predicción de estos modelos se desarrolla este artículo en cuatro partes de las cuales la primera es esta introducción. En la segunda parte se presentan las propuestas teóricas sobre el uso de estos dos modelos en la teoría del crecimiento y en la determinación del ingreso, así como también el enfoque dinámico planteado por Samuelson. En la tercera sección se presentan las estimaciones y resultados de los modelos mientras que en la cuarta y última sección se presentan las conclusiones del trabajo.

2. Propuestas teóricas

2.1. El multiplicador y acelerador en la teoría del crecimiento económico

En los últimos veinticinco años, señala Bernal (2009), se ha publicado una gran cantidad de artículos sobre las teorías del crecimiento económico y resulta indiscutible que uno de los más sobresalientes autores de este movimiento fue Harrod. Su teoría sobre el crecimiento económico merece cierto reconocimiento y por ello es obligatoria una deferencia en relación con sus principales contribuciones en este terreno. Harrod (1939) reintrodujo la idea de crecimiento en la teoría económica y el concepto de crecimiento sostenido y proporcional. Así mismo, volvió a darle importancia al papel del ahorro como acumulación de capital y proporcionó a los teóricos del desarrollo elementos suficientes para su análisis. Adicionalmente, ofreció un marco para que su análisis pudiera interpretarse como una explicación de los ciclos y del crecimiento económico. Involucró también la relación entre crecimiento económico y el crecimiento de la balanza de pagos. De igual manera, y entre otras contribuciones, retomó el papel preponderante de las expectativas empresariales como origen de los problemas para conseguir un crecimiento sostenido y de pleno empleo. El modelo de Harrod también ha sido interpretado como un modelo que contribuyó al análisis del crecimiento económico por medio de la distribución del ingreso, como en su momento lo hicieron Kaldor y Pasinetti (Meade, 1977).

Por último, el modelo de Harrod ha sido interpretado como una relación lineal entre crecimiento y acumulación de capital, como lo señalan Thirlwall (1979, 2001), Dajin Li (2002) y Easterly (1997, 1999). Esta versión del modelo de Harrod, es decir, la relación entre crecimiento económico e inversión, también podría explicarse a través de otros factores como la inclusión de las restricciones de liquidez y de aspectos como la incertidumbre sobre la tasa de incremento salarial y/o la esperanza de vida (Kotlikoff, 1998).

Desde la teoría del crecimiento económico, tanto Harrod como Domar sintetizaron sus modelos de crecimiento en una simple y robusta ecuación. El modelo de Harrod (1939, 1966 y 1979) supone que existe un nivel de precios dado en la economía (no hay inflación), que se presenta un equilibrio macroeconómico donde el ahorro es igual a la inversión, que la propensión marginal a ahorrar (s) es igual al ahorro medio de la economía, que las variables se usan en términos netos, es decir descontada la depreciación, que la capacidad productiva de la economía es calculable, es decir tanto el *stock* de capital (K) como el producto (Y) pueden ser cuantificados y, finalmente, que la tasa de crecimiento de la población (n) y la productividad (β) crecen exógenamente.

El modelo parte de la igualdad entre la inversión (I) o las variaciones en el capital y el ahorro, es decir, $I = \Delta K = S = sY$. Así mismo, establece la relación marginal capital producto como $C = \Delta K/\Delta Y$, es decir, establece que la inversión depende de cambios en las variaciones en el producto. Con base en estas ecuaciones deriva su ecuación que representa una senda de crecimiento, así:

$$G_y = s/C \qquad [1]$$

En donde Gy es la tasa de crecimiento observada, s es la tasa de ahorro y C es la relación marginal capital producto que puede o no dejar satisfechos a los capitalistas cuando realizan una inversión. Harrod plantea adicionalmente que la economía puede lograr una senda dinámica de crecimiento cuando los inversionistas quedan completamente satisfechos con sus decisiones de inversión. A esta tasa de crecimiento la denomina tasa de crecimiento garantizada (Gw) que es igual a la tasa de ahorro dividida por la relación marginal capital producto que deja satisfechos a los capitalistas Cr

$$G_w = s/C_r \qquad [2]$$

Estas tasas de crecimiento efectiva (Gy) y garantizada (Gw) podrían ser iguales a la tasa de crecimiento natural, la cual involucra la tasa de crecimiento de la población y la tasa de crecimiento de la productividad[1]; la denomina Gn. Se observará que la denominada edad de oro se presenta cuando $Gw = Gy = Gn$. La divergencia entre estas tasas de crecimiento originan los problemas de pleno empleo e inestabilidad. Estos problemas pueden sintetizarse de la siguiente manera:

- Si la tasa de crecimiento teórica es igual a la tasa de crecimiento efectiva, es decir, si $Gw = Gy$, entonces no existen problemas porque significa que la inversión está creciendo a la tasa que requiere la economía para que a través del tiempo las cantidades demandadas sean iguales a las cantidades ofrecidas.
- Si la tasa de crecimiento teórica es mayor que la tasa de crecimiento efectiva, esto es, que $Gw > Gy$, significa que la oferta es mayor que la demanda; en consecuencia, la economía presentaría un exceso de oferta que generaría, o bien, deflación, o bien desempleo. En síntesis, en este caso se presentan dos problemas; uno, desempleo y dos, inestabilidad en el modelo.
- Finalmente, si $Gw < Gy$ habrá exceso de demanda. En este caso los empresarios pensarán que se quedaron cortos en la inversión y por lo tanto la elevarán para el próximo periodo; pero para ese periodo la inversión seguirá creciendo a una tasa mayor haciendo que la demanda se distancie más de la oferta, en consecuencia se presentará inflación o sobreempleo de recursos e inestabilidad.

Por su parte, el objetivo del modelo de crecimiento Harrod (1939)-Domar (1946) es mostrar las condiciones bajo las cuales la economía podría crecer en forma sostenida y equilibrada a través del tiempo, con pleno empleo de capital y de trabajo. Para ello, se supone que existe un nivel de precios dado en la economía (no hay inflación), se presenta un equilibrio macroeconómico el ahorro es igual a la inversión, la propensión marginal a ahorrar es igual al ahorro medio de la economía y las variables se usan en términos netos, es decir, descontada la depreciación y, finalmente, que la capacidad productiva de la economía es calculable; en otras palabras, tanto el *stock* de capital como el producto pueden ser cuantificados. Bajo estos supuestos, el modelo de crecimiento muestra que, en el tiempo, el crecimiento equilibrado de la economía se presenta cuando las variaciones de las cantidades demandadas son iguales a las variaciones de las cantidades ofrecidas. En términos formales se tendría:

$$\frac{dY^d}{dt} = \frac{dY^s}{dt} \qquad [3]$$

Siendo dY_d/dt las variaciones de la demanda agregada (o cantidades demandadas) en el tiempo dY_s/dt, las variaciones de la oferta agregada en el tiempo. Para llegar a esta condición es necesario encontrar la tasa de crecimiento de la inversión a través del tiempo que garantiza esta igualdad.

En primer lugar, el crecimiento de la demanda a través del tiempo está determinado por los incrementos de la inversión vía el multiplicador keynesiano de la inversión ($1/s$). Este multiplicador se considera una constante determinado por la propensión marginal a ahorrar (s) que también se considera constante. Por lo tanto, un incremento en la inversión a través del tiempo (dI/dt) conducirá a un incremento en la demanda agregada en tantas veces sea el valor[2] de $1/s$. Si la propensión marginal a ahorrar no fuera constante, entonces el multiplicador de la inversión ($1/s$) tampoco sería constante y de acuerdo con esto, la demanda o renta aumentaría (disminuiría) si la propensión marginal a ahorrar disminuyera (aumentara), o simplemente, los impactos sobre la renta derivados del cambio en la inversión fueran inciertos. Formalmente esto se traduce a:

$$\frac{dY^d}{dt} = \left(\frac{1}{s}\right)\frac{dI_o}{dt} \qquad [4]$$

En este caso, la ecuación [4] es una ecuación diferencial con respecto al tiempo t.

En segundo lugar, el crecimiento del producto según los postulados de Domar (1946) está determinado por la modificación de los recursos naturales y por la fuerza de trabajo, del capital y del estado de la técnica. Sin embargo, para explicar completamente los factores que determinan la producción o la oferta del producto de la economía, Domar considera que existe dificultad en analizar los cambios en los recursos naturales y la técnica. Por tal razón, prefiere suponer que están dados. En consecuencia, plantea que el producto de la economía está determinado por las variaciones en el capital, la mano de obra y la productividad de ambos factores (manteniendo los demás constantes). Así mismo, el autor supone que existe pleno empleo en la economía y centra su análisis en la expansión de la capacidad productiva derivada de los cambios en el capital y de la productividad social media potencial de la inversión.

La productividad social media potencial de la inversión se refiere al incremento de la capacidad productiva de toda la sociedad y no de una empresa en particular cuando esta se amplía. Así mismo, no se refiere al concepto tradicional de la productividad marginal del capital porque en él se contempla la invariabilidad (*ceteris paribus)* de los demás factores y del estado de la técnica, mientras que la productividad social media potencial de la inversión sí involucra implícitamente esos cambios. En otras palabras, la productividad social media potencial de la inversión se caracteriza porque su magnitud depende en gran medida del progreso tecnológico; es decir, que la inversión no genera la productividad media potencial social sino que la acompaña en el incremento en la capacidad productiva. Adicionalmente, el concepto de potencial significa, no el incremento en la renta nacional, sino el incremento potencial productivo de la economía. De esta forma, un valor elevado de la productividad social media potencial de la economía implica un incremento rápido del producto de la economía.

Las variaciones del capital a través del tiempo son iguales a la inversión neta.[3] Por lo tanto, la oferta o capacidad productiva de la economía también está determinada por la inversión. Como la oferta y la demanda están determinadas por la inversión entonces es necesario encontrar la tasa de crecimiento de la inversión en términos dinámicos para garantizar el crecimiento sostenido y de pleno empleo de la economía. La ecuación de oferta es:

$$\frac{dY^s}{dt} = \sigma I_t \qquad [5]$$

En esta ecuación, σ representa la productividad social media potencial de la inversión e I_t es la inversión. Entonces, las variaciones de la oferta o del producto a través del tiempo son iguales al producto de la productividad social media de la inversión por la inversión realizada en cada periodo.

Si las ecuaciones [4] y la [5)] se igualan, implica que tanto las cantidades demandadas como ofrecidas en la economía crecerán en la misma proporción, entonces, no habrá excesos de oferta ni de demanda. Por esta razón es necesario encontrar la tasa de crecimiento de la inversión que garantice este equilibrio a través del tiempo. Matemáticamente se tiene:

$$\sigma I_t = (1/s)\left(dI/dt\right) \qquad [6]$$

Reordenando esta ecuación se puede escribir de la siguiente forma:

$$\sigma s dt = dI/I \qquad [7]$$

De esta ecuación, se debe hallar la tasa de crecimiento de la inversión que garantice un crecimiento sostenido de largo plazo, por lo tanto, se debe integrar esta ecuación de la siguiente manera:

$$\int \sigma s dt = \int dI/I \qquad [8]$$

Después de resolver esta integral se llega a la solución de la variable inversión que se representa de la siguiente manera:

$$I_t = e^{s\sigma t} \qquad [9]$$

La ecuación [9] establece que la inversión crece a través del tiempo en forma exponencial a la tasa "$s\sigma$". Esta tasa, que se define como el producto de la propensión marginal a ahorrar por la productividad social media potencial de la inversión, es la tasa de crecimiento de la inversión que garantiza un crecimiento sostenido de la economía en el largo plazo. En otras palabras, la economía crecerá a la tasa "$s\sigma$" de tal manera que en el transcurso del tiempo no se presentarán problemas de desempleo de los recursos o inflación.

La tasa de crecimiento de la inversión, que es también la del producto y la del capital "$s\sigma$", es la tasa teórica a la que debería crecer la inversión para que la oferta y la demanda sean siempre iguales en el tiempo. Los problemas surgen cuando la inversión no crece a la tasa "$s\sigma$", sino que crece a otra tasa, por ejemplo "α", que sería la tasa de crecimiento efectiva de la inversión que desde luego podría diferir o igualar a la tasa teórica. Formalmente se tiene:

$$I_t = I_0 e^{\sigma t} \qquad [10]$$

Si se diferencia la ecuación [10] con respecto al tiempo se tiene:

$$\frac{dI_t}{dt} = d(I_0 e^{\sigma t}/dt) \qquad [11]$$

Que es igual a:

$$\frac{dI_t}{dt} = \alpha(I_0 e^{\sigma t}) \qquad [12]$$

Remplazando este valor de la ecuación [12] en la [2] se obtiene:

$$\frac{dY^d}{dt} = \left(\frac{1}{s}\right)\alpha(I_0 e^{\sigma t}) \qquad [13]$$

Adicionalmente, remplazando la ecuación [10] en la [5] se obtiene:

$$\frac{dY^s}{dt} = \alpha I_0 e^{\sigma t} \qquad [14]$$

Con base en estas dos últimas ecuaciones, la [13] y la [14], el autor propone la relación entre los incrementos en la demanda a través del tiempo frente a los cambios en la oferta o capacidad productiva en el tiempo cuando la inversión crece a una tasa diferente a la que garantiza un crecimiento sostenido. A esta relación la denomina el coeficiente de la capacidad instalada. Formalmente se tiene:

$$\frac{\frac{dY^d}{dt}}{\frac{dY^s}{dt}} = \frac{\alpha}{s\sigma} \qquad [15]$$

De acuerdo con este resultado se presentan tres alternativas de análisis:

- Si la tasa de crecimiento teórica es igual a la tasa de crecimiento efectiva, es decir, si σs = α, entonces no existen problemas porque significa que la inversión está creciendo a la tasa que requiere la economía para que a través del tiempo las cantidades demandadas sean iguales a las cantidades ofrecidas.
- Si la tasa de crecimiento teórica es mayor que la tasa de crecimiento efectiva, esto es, si σs > α, significa que la oferta es mayor que la demanda; en consecuencia, la economía presentaría un exceso de

oferta que generaría, o bien, deflación, o bien desempleo. En síntesis, en este caso se presentan dos problemas: uno, desempleo y dos, inestabilidad en el modelo.

- Finalmente, si $\sigma s < \alpha$, entonces habrá exceso de demanda. En este caso, los empresarios pensarán que se quedaron "cortos" en la inversión y por lo tanto la elevarán para el próximo periodo; pero para ese periodo la inversión seguirá creciendo a una tasa mayor haciendo que la demanda se distancie más de la oferta; en consecuencia se presentará inflación o sobre-empleo de recursos e inestabilidad. Este problema de inestabilidad es el que ha generado grandes críticas al modelo como las que realiza Easterly (1997), pero también ha fomentado nuevos usos como es el caso de Grabowski R. y Shields M. (2009).

2.2. El multiplicador y el acelerador en la determinación de la renta

2.2.1. Un enfoque estático

El multiplicador y el acelerador han sido ampliamente utilizados en los modelos de determinación del ingreso como lo refleja la ecuación [4]. Así mismo, en un modelo keynesiano sencillo en el que interactúan el multiplicador y el acelerador se hace explícita la relación positiva entre inversión e ingreso; a manera de ejemplo se tiene $Y = C + I; C = cY; I = I_0 + bY$ cuya solución de este sistema de ecuaciones conduce a la determinación del ingreso de la siguiente manera:

$$Y = \left(\frac{1}{1-c-b}\right) I_0 \qquad [16]$$

De donde $1/(1\text{-}c\text{-}b)$ es el multiplicador conjunto con el acelerador, c es la propensión marginal a consumir y b es la propensión marginal a invertir o acelerador. Esta ecuación refleja el hecho de que ante un incremento en la inversión autónoma I_0 el ingreso crece en el tamaño del multiplicador y como la renta crece entonces vía acelerador vuelve y crece la renta y así sucesivamente. Este enfoque se ha extendido a la inclusión del sector gobierno y el sector externo y monetario en el bien conocido modelo aumentado *IS-LM* o *IS-LM-BP*.

2.2.2. Un enfoque dinámico

La interacción del multiplicador con acelerador de Samuelson (1939) se considera como un proceso dinámico en la determinación del ingreso (Y_t), el cual puede ser escrito como la suma de tres componentes: *i*) el gasto de gobierno, g_t, *ii*) el gasto de consumo, C_t, y *iii*) la inversión privada inducida, I_t.

$$Y_t = g_t + C_t + I_t$$

De igual manera, Samuelson señala que de acuerdo con el supuesto de Hansen el consumo $C_t = \alpha_1 Y_{t-1}$, en donde $0 < \alpha_1 < 1$ es la propensión marginal al consumo. Por otra parte, la inversión privada inducida, I_t, está representada por la ecuación $I_t = \beta_1(C_t - C_{t-1})$, donde $(0 < \beta_1 < 1)$ que corresponde a la propensión marginal de la inversión. Las variables predeterminadas del modelo son por una parte g_t, que es exógena, y C_{t-1} y Y_{t-1}, que son endógenas con rezagos.

En estos términos el sistema de ecuaciones estructurales de manera ordenada es el siguiente:

$$Y_t = g_t + C_t + I_t \quad [17]$$

$$C_t = \alpha_1 Y_{t-1} \quad [18]$$

$$I_t = \beta_1(C_t - C_{t-1}) \quad [19]$$

Ahora, la solución del sistema en función de Y_t se tiene que al combinar [18] y [19]

$$I_t = \beta_1(C_t - C_{t-1}) \quad [20]$$

$$I_t = \beta_1(\alpha_1 Y_{t-1} - \alpha_1 Y_{t-2}) \quad [21]$$

$$I_t = \alpha_1\beta_1 Y_{t-1} - \alpha_1\beta_1 Y_{t-2} \quad [22]$$

Luego al remplazar en la ecuación [17] se tiene que

$$Y_t = g_t + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_1\beta_1 Y_{t-1} - \alpha_1\beta_1 Y_{t-2} \quad [23]$$

Y al reducir términos

$$Y_t = g_t + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_1\beta_1 Y_{t-1} - \alpha_1\beta_1 Y_{t-2} \quad [24]$$

Lo cual equivale, a una ecuación en diferencia de grado dos

$$Y_t - \alpha_1(1 + \beta_1) Y_{t-1} + \alpha_1\beta_1 Y_{t-2} = g_t \quad [25]$$

Como se puede observar, la transformación del sistema de ecuaciones simultáneas corresponde a un sistema autorregresivo de orden dos. Es decir, equivale a un polinomio de segundo grado, el cual puede expresarse como una ecuación dinámica fundamental igualándola a cero:

$$Y_t - \alpha_1(1 + \beta_1) Y_{t-1} + \alpha_1\beta_1 Y_{t-2} = 0 \quad [26]$$

Esta ecuación supone la forma:

$$Y_t = Ab^t \qquad [27]$$

De ahí que la ecuación característica para el modelo es la siguiente

$$b^2 - \alpha_1(1 + \beta_1)b + \alpha_1\beta_1 = 0 \qquad [28]$$

Por la fórmula de la cuadrática se obtienen las raíces características

$$b_1, b_2 = \frac{\alpha_1(1+\beta_1) \pm \sqrt{\alpha_1^2(1+\beta_1)^2 - \alpha_1\beta_1}}{2} \qquad [29]$$

Ahora por el lado del consumo $C_t = \alpha_1 Y_{t\text{-}1}$

Para encontrar el equilibrio en función de C_t se parte de la equivalencia o el equilibrio de la inversión I_t.

$$I_t = \beta_1(C_t - C_{t-1}) = \alpha_1\beta_1 Y_{t-1} - \alpha_1\beta_1 Y_{t-2} \qquad [30]$$

En estos términos la ecuación [18] se renombra por [31]

$$C_t = \alpha_1 Y_{t\text{-}1} \qquad [31]$$

$$Y_{t-1} = g_{t-1} + C_{t-1} + I_{t-1} \qquad [32]$$

$$C_t = \alpha_1(g_{t-1} + C_{t-1} + I_{t-1}) \qquad [33]$$

$$C_t = \alpha_1 g_{t-1} + \alpha_1 C_{t-1} + \alpha_1 I_{t-1} \qquad [34]$$

$$C_t = \alpha_1 g_{t-1} + \alpha_1 C_{t-1} + \alpha_1[\beta_1(C_{t-1} - C_{t-2})] \qquad [35]$$

$$C_t = \alpha_1 g_{t-1} + \alpha_1 C_{t-1} + \alpha_1\beta_1 C_{t-1} - \alpha_1\beta_1 C_{t-2} \qquad [36]$$

De acuerdo con lo anterior, se tiene la ecuación dinámica fundamental en función de C_t. Esta ecuación, al igual que la de ingreso, corresponde a un polinomio de segundo grado. La anterior ecuación se iguala cero con el fin de determinar la raíz característica:

$$C_t - \alpha_1 C_{t-1} - \alpha_1\beta_1 C_{t-1} + \alpha_1\beta_1 C_{t-2} = \alpha_1 g_{t-1} \qquad [37]$$

$$C_t - \alpha_1 C_{t-1} - \alpha_1\beta_1 C_{t-1} + \alpha_1\beta_1 C_{t-2} = 0 \qquad [38]$$

$$C_t - \alpha_1(1 + \beta_1)C_{t-1} + \alpha_1\beta_1 C_{t-2} = 0 \qquad [39]$$

Esta ecuación toma la forma: $Y_t = Ab^t$

De ahí que la ecuación característica para el modelo es la siguiente:

$$b^2 - \alpha_1(1 + \beta_1)b + \alpha_1\beta_1 = 0 \qquad [40]$$

Por la fórmula de la cuadrática, se obtienen las raíces características

$$b_1, b_2 = \frac{\alpha_1(1+\beta_1) \pm \sqrt{\alpha_1^2(1+\beta_1)^2 - 4\alpha_1\beta_1}}{2} \qquad [41]$$

Para encontrar el equilibrio en función de I_t se tiene que

$$I_t = \beta_1(C_t - C_{t-1}) = \alpha_1\beta_1 Y_{t-1} - \alpha_1\beta_1 Y_{t-2} \qquad [42]$$

Ahora, de la [17], se deducen Y_{t-1} y Y_{t-2}

$$Y_{t-1} = g_{t-1} + C_{t-1} + I_{t-1} \quad [43]$$
$$Y_{t-2} = g_{t-2} + C_{t-2} + I_{t-2} \quad [44]$$

Al remplazar en I_t, se tiene que

$$I_t = \alpha_1\beta_1 Y_{t-1} - \alpha_1\beta_1 Y_{t-2} \quad [45]$$
$$I_t = \alpha_1\beta_1(g_{t-1} + C_{t-1} + I_{t-1}) - \alpha_1\beta_1 (g_{t-2} + C_{t-2} + I_{t-2}) \quad [46]$$
$$I_t = \alpha_1\beta_1(g_{t-1} + C_{t-1} + I_{t-1}) - \alpha_1\beta_1 (g_{t-2} + C_{t-2} + I_{t-2}) \quad [47]$$
$$I_t = \alpha_1\beta_1 g_{t-1} + \alpha_1\beta_1 C_{t-1} + \alpha_1\beta_1 I_{t-1} - \alpha_1\beta_1 g_{t-2} - \alpha_1\beta_1 C_{t-2} - \alpha_1\beta_1 I_{t-2} \quad [48]$$

Ahora,

$$I_{t-1} = \beta_1(C_{t-1} - C_{t-2})$$

Al reagrupar la ecuación [48] se tiene que

$$I_t = \alpha_1\beta_1 g_{t-1} - \alpha_1\beta_1 g_{t-2} + \alpha_1\beta_1 C_{t-1} - \alpha_1\beta_1 C_{t-2} + \alpha_1\beta_1 I_{t-1} - \alpha_1\beta_1 I_{t-2} \quad [49]$$
$$I_t = \alpha_1(\beta_1 g_{t-1} - \beta_1 g_{t-2}) + \alpha_1(\beta_1 C_{t-1} - \beta_1 C_{t-2}) + \alpha_1(\beta_1 I_{t-1} - \beta_1 I_{t-2}) \quad [50]$$

En estos términos, como se trata de encontrar el equilibrio en función de la inversión, se tiene que

$$I_{t-1} = \beta_1(C_{t-1} - C_{t-2}) \quad [51]$$

Se remplaza por su equivalencia en la ecuación [50]

$$I_t = \alpha_1(\beta_1 g_{t-1} - \beta_1 g_{t-2}) + \alpha_1 I_{t-1} + \alpha_1(\beta_1 I_{t-1} - \beta_1 I_{t-2}) \quad [52]$$

Al reagrupar

$$I_t = \alpha_1(\beta_1 g_{t-1} - \beta_1 g_{t-2}) + \alpha_1(1 + \beta_1) I_{t-1} - \alpha_1\beta_1 I_{t-2} \quad [53]$$
$$I_t + \alpha_1(1 + \beta_1) I_{t-1} - \alpha_1\beta_1 I_{t-2} = \alpha_1\beta_1 g_{t-1} - \alpha_1\beta_1 g_{t-2} \quad [54]$$

Esta ecuación, al igual que la del consumo e ingreso, supone la forma $Y_t = Ab^t$. De ahí que la ecuación característica para el modelo es la siguiente

$$b^2 - \alpha_1(1 + \beta_1)b + \alpha_1\beta_1 = 0 \quad [55]$$

Por la fórmula de la cuadrática, se obtienen las raíces características

$$b_1, b_2 = \frac{\alpha_1(1+\beta_1) \pm \sqrt{\alpha_1^2(1+\beta_1)^2 - 4\alpha_1\beta_1}}{2} \quad [56]$$

Este sistema tiene solución porque cumple con las condiciones necesaria y necesaria y suficiente. La condición necesaria exige que el número de variables endógenas deba ser igual al número de ecuaciones. Se tienen tres variables endógenas Y_t, C_t e I_t y tres ecuaciones. La condición necesaria y suficiente establece que el determinante de la matriz de coeficientes debe ser no singular, es decir diferente de cero; esta condición también se cumple. Seguidamente, se emplea la regla de identificación con el fin de establecer el método de estimación. En este sentido, se usa la siguiente regla:

$$K - k \geq m - 1 \qquad [57]$$

Donde

K = número de variables predeterminadas en el modelo

k = número de variables predeterminadas en la ecuación de análisis

m = número de variables endógenas en la ecuación

Cuadro 1. Identificación del modelo

Ecuación	$K - k \geq m - 1$	Identificación de la ecuación
1) $Y_t = g_t + C_t + I_t$	$3 - 1 \geq 3 - 1$	Identificada
2) $C_t = \alpha_1 Y_{t-1}$	$3 - 1 \neq 1 - 1$	Sobreidentificada
3) $I_t = \beta_1(C_t - C_{t-1})$	$3 - 1 \neq 2 - 1$	Sobreidentificada

La ecuación identificada corresponde a $Y_t = g_t + C_t + I_t$. De igual manera, como se demostró anteriormente, el equilibrio corresponde a

$$Y_t = \alpha_1(1 + \beta_1)Y_{t-1} - \alpha_1\beta_1 Y_{t-2} + g_t \qquad [58]$$

Esta es una ecuación de segundo orden que puede expresarse de manera alterna como

$$Y_t - \alpha_1(1 + \beta_1)Y_{t-1} + \alpha_1\beta_1 Y_{t-2} = g_t \qquad [59]$$

A partir del multiplicador de rezago se obtiene

$$(1 - \alpha_1(1 + \beta_1)\mathrm{L} + \alpha_1\beta_1 L^2)\ Y_t = g_t \qquad [60]$$

En estos términos, se puede establecer que el ingreso nacional podría estabilizarse como una solución particular de la siguiente manera:

$$Y_p = \frac{g_t}{1-\alpha_1(1+\beta_1)\mathrm{X} + \alpha_1\beta_1} = \frac{g_t}{1-\alpha_1} \qquad [61]$$

Por lo tanto, el multiplicador keynesiano estará representado por $\frac{1}{1-\alpha_1}$, el cual prevalece en ausencia de la inversión inducida, y $\frac{g_t}{1-\alpha_1}$ corresponderá al elemento exógeno de gasto por multiplicador.

De esta manera, dependiendo del módulo de la raíz característica asociados a los valores de b_1, b_2 estos se establecen a partir la ecuación [60]

$$(1 - \alpha_1(1 + \beta_1)\mathrm{X} + \alpha_1\beta_1 X^2) = 0 \qquad [62]$$

2.2.3. Alternativas de las raíces características

Retomando la cuadrática se tiene

$$b_1, b_2 = \frac{\alpha_1(1+\beta_1)\pm\sqrt{\alpha_1^2(1+\beta_1)^2-4\alpha_1\beta_1}}{2} \qquad [63]$$

Caso 1. Sí $a_1^2 + 4a_2 > 0$, entonces $\alpha_1^2(1+\beta_1)^2 > 4\alpha_1\beta_1$. Al dividir en ambos términos de la inecuación por α_1 entonces, la equivalencia corresponde a:

$$\alpha_1(1+\beta_1)^2 > 4\beta_1 \qquad [64]$$

O lo que equivale a decir que

$$\alpha_1 > \frac{4\beta_1}{(1+\beta_1)^2} \qquad [65]$$

Caso 2. $a_1^2 + 4a_2 = 0$, entonces

$$\alpha_1 = \frac{4\beta_1}{(1+\beta_1)^2} \qquad [66]$$

Caso 3. $a_1^2 + 4a_2 < 0$, entonces

$$\alpha_1 < \frac{4\beta_1}{(1+\beta_1)^2} \qquad [67]$$

Ahora, dependiendo de la raíz característica, entonces, se harán las predicciones y la convergencia dependerá de los valores que tomen la propensión marginal a consumir α_1 y el coeficiente del acelerador de la inversión β_1, que se traducirán en la estabilidad dinámica de la renta nacional Y_t.

3. Estimaciones y resultados

Los resultados para Colombia se muestran en el cuadro 2. Para la predicción, los autores utilizaron las progresiones de las tasas de crecimiento. Por ejemplo los periodos dos y tres se obtienen de la siguiente manera:

(1+ (0,63*(1,18)*0)-(0,18)*0)=1,743

(1+ (0,63*(1,18)*1,743)-(0,18)*1)=2,116, y así sucesivamente hasta alcanzar el máximo en 2,290.

El valor proyectado de acuerdo con los coeficientes del multiplicador keynesiano y el coeficiente del acelerador para Colombia, *Alpha* = 0,63 y *Beta* = 0,18 dan cuenta que cae en la región B.

Cuadro 2. Valores de relación de la secuencia del modelo de renta nacional

Periodo	* Alpha = 0,63 Beta = 0,18
1	1
2	1,743
3	2,116
4	2,259
5	2,298
6	2,302
7	2,298
8	2,293
9	2,291
10	2,290
11	2,290
12	2,290

Fuente: cálculos propios con base en Alan Heston, Robert Summers and Bettina Aten, Penn World Table Version 6.1, Center for International Comparisons at the University of Pennsylvania (CICUP), October 2002. *Los valores seleccionados corresponde a la propensión a consumir α=0,63 y β=0,18 corresponde al acelerador de la inversión, para Colombia. Estas estimaciones se realizaron a través de MCO.

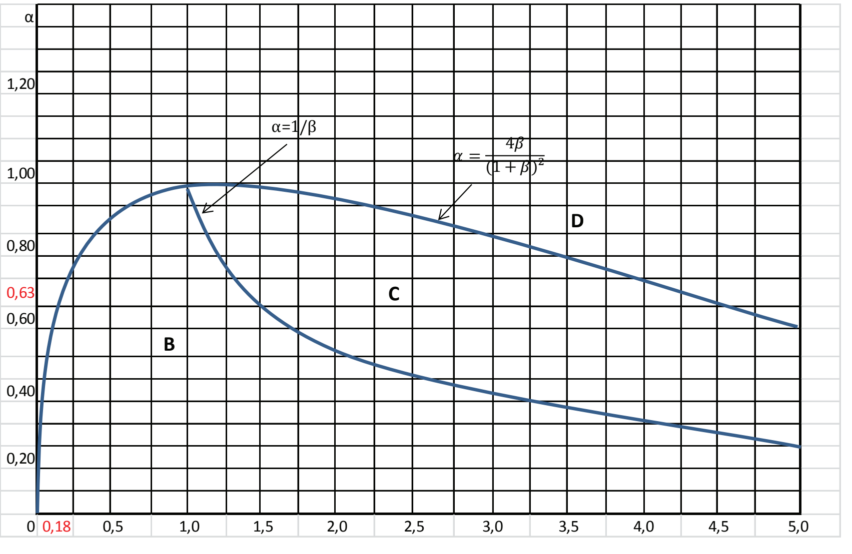

Figura 1. Límites de las regiones del comportamiento cualitativo del ingreso nacional

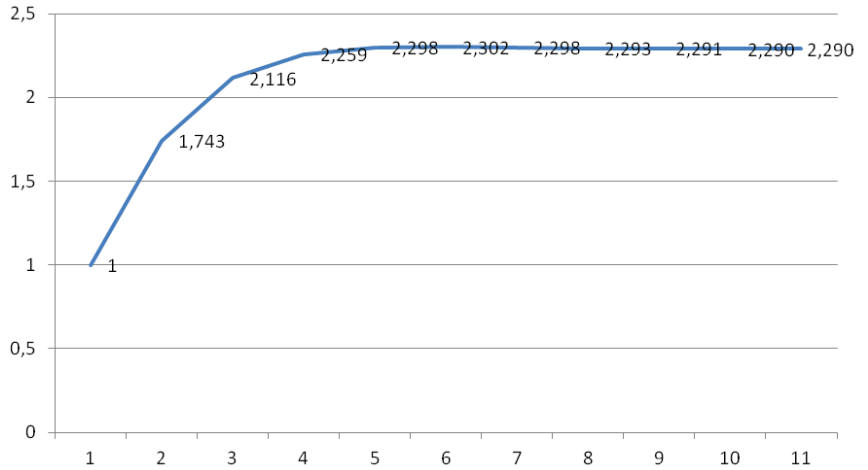

Figura 2. Tendencia del Multiplicador acelerador para Colombia. Fuente: (Ver también Meza 2012)

De acuerdo con el valor estimado, la relación se encuentra en la región B. Es decir que un nivel continuo del gasto público se traducirá en pequeños movimientos amortiguados oscilatorios de la renta nacional, que se estabilizará poco a poco convirtiéndose en una asíntota del nivel de gastos del gobierno. Dicho de otra forma, el incremento del gasto del gobierno conducirá a incrementar la renta de la economía hasta que se eliminen los excesos de demanda generados por ese gasto adicional.

4.1. Estimación de la ecuación Harrod-Domar para Colombia

A continuación se presentan las estimaciones de la tasa de crecimiento del modelo Harrod-Domar porque incluye implícitamente la interacción entre el multiplicador y el acelerador. Las estimaciones se realizaron utilizando la base de datos *Penn World Table*. Esta información corresponde al periodo 1970-2003.

Según la figura 3, la economía colombiana muestra que la tasa de crecimiento real es seguida por la tasa de crecimiento de Harrod y su comportamiento es similar. La tasa de crecimiento más alta se registró en 1978 (8,6%) con una tasa de ahorro del 13,5% y una relación marginal capital producto de 1,3. En 1991 la tasa de ahorro se incrementó al

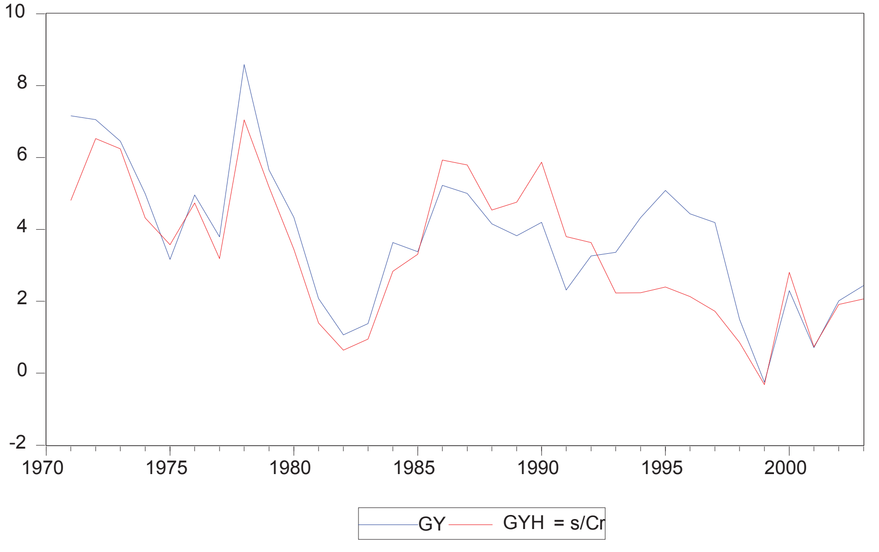

Figura 3. Tasa de crecimiento real y la tasa de crecimiento de Harrod para Colombia. Fuente: cálculos propios con base en Summers, R. and Heston, A: Penn World Table The Penn World Table (Mark 5): An expanded set of international comparisons 1950-1988", en: *Quarterly Journal of Economics*, 1991

15% mientras que la relación marginal capital producto aumentó hasta 3,1 y dio lugar a una tasa de crecimiento real de apenas el 2,8%. Por su parte, la tasa de crecimiento de la economía en 1982 fue de 0,9%, con una tasa de ahorro del 8,9% pero con una relación marginal capital producto de 13,3. Esto corrobora que existe una relación directa entre la productividad marginal del capital y la tasa de crecimiento de la economía o que el modelo del acelerador representado en la relación marginal capital producto determina la tasa de crecimiento.

Estimación de la tasa de crecimiento económico con la ecuación Harrod-Domar, por M.C.O

$$DLGY = 0{,}001386 - 0{,}992174(DLCR) - 0{,}371666(DLSAV)$$

std	(0,021650)	(0,042802)	(0,185299)
Tst	0,064004	-23,18069**	-2,005766**

$R^2 = 0{,}95$ $\qquad F = 268{,}76^{**}$ $\qquad DW = 1{,}88$

Con base en la estimación, se puede concluir que las variaciones en la tasa de crecimiento de la economía están explicadas en un 95% por las variaciones en la relación marginal capital producto y por las variaciones en la tasa de ahorro. Más explícitamente, un incremento de una unidad en la relación marginal capital producto reduce la tasa de crecimiento en 0,99 puntos al igual que un aumento en la tasa de ahorro de un punto genera disminuciones en la tasa de crecimiento de 0,37 puntos. Este hecho refleja el cumplimiento de la paradoja de la austeridad de Keynes en el sentido de que un mayor ahorro reduce la demanda y por consiguiente el crecimiento de la economía cae.

4. Conclusiones

Siempre se ha debatido la importancia del modelo del multiplicador y del acelerador. Desde Samuelson, pasando por Harrod y Domar, la interacción entre estos dos modelos ha sido utilizada para explicar la determinación de la renta o para explicar el crecimiento económico. En un modelo sencillo de determinación de la renta aplicado al caso colombiano se demuestra que un incremento exógeno del gasto conduce a incrementar la renta de la economía y que estos incrementos convergen asintóticamente hacia un valor donde se eliminan los excesos de demanda.

De igual manera, el uso del modelo del acelerador en el modelo de crecimiento de Harrod-Domar permite concluir con base en las estimaciones realizadas que ante un aumento en 1 punto en la tasa de ahorro, esto es una disminución en el consumo medio de la economía o propensión marginal a consumir, la tasa de crecimiento de la economía se reduce en 0,37%, mientras que una reducción de un punto en la relación marginal capital producto incrementa la tasa de crecimiento de la economía colombiana en 0,99%; es decir, los cambios en el acelerador conducen a cambios inversos en la tasa de crecimiento de la economía en la misma proporción. Desde luego, estas conclusiones son limitadas porque aquí no se tuvieron en cuenta el sector público y el sector externo. Un análisis más completo será objeto de una futura investigación.

5. Notas

1 De acuerdo con Harrod, la población crece exponencialmente a la tasa "*n*" y está representada por $L_t = L_0 e^{nt}$. Así mismo, la tasa de crecimiento de la productividad está dada por β y crece de la siguiente forma: $Y_t = Y_0 e^{\beta t}$. En consecuencia, la tasa de crecimiento natural será igual a la suma de la tasa de crecimiento de la población y de la productividad, es decir, $Gn = \beta + n$.

2 Este resultado es la solución de un modelo keynesiano muy simple en el que se argumenta que la renta está determinada por la demanda agregada de la economía (*Y*) representada por la suma de los gastos en consumo (*C*) y los gastos en inversión (*I*). Se supone que el consumo es una función creciente de la renta mientras que la inversión se considera una variable independiente. El modelo es el siguiente:

$Y = C + I$ [1]

$C = A + cY$ con la condición de primer orden $dC/dY = c$ siendo $0 < c < 1$. [2]

$I = I_o$ [3]

De donde "*A*" es el consumo autónomo, "*c*" es la propensión marginal a consumir e "I_o" la inversión. La solución de ese modelo es:

$Y = (1/1\text{-}c)\ (A + I_o)$ [4]

o alternativamente $Y = (1/s)\ (A + I_o)$, siendo $1\text{-}c = s$. Así, un incremento en la inversión incrementará la renta en 1/s veces, es decir:

$\delta Y / \delta I_o = 1/s$ [5]

3 Se supone que $dK/dt = I_t$. Esto implica que si las variaciones de la capacidad productiva a través del tiempo o de la oferta agregada son $dY^s/dt = \sigma dK/dt$ entonces, $dY^s/dt = \sigma I_t$ siendo en este caso la productividad social media potencial de la inversión igual a σ más no la productividad marginal del capital.

6. Referencias

Bernal B., José R. (2009). "La tasa de crecimiento garantizada de Harrod como ley del crecimiento económico: Una comprobación empírica." *Cuadernos de Economía*, 27, 49 (II semestre, 2008), pp. 57-88.

Domar, Evsey (1946). "Capital expansion, rate of growth and employment." *Econometrica*, 14, pp. 137-147.

Easterly, William (1997). "The ghost of financing gap: How the Harrod-Domar growth model still haunts development economics."*Policy Research Working Paper Series* (The World Bank), 1807.

Grabowski, Richard and Michael Shields (2009). "A dynamic, Keynesian model of development." *Journal of Economic Development*, 25, 1, pp. 1-15.

Harcourt, Geoffrey C. and N. F. Laing (1971). *Capital and growth: Selected readings.* Middlesex: Penguin Books.

Harrod, Roy Forbes (1939). "An essay in dynamic theory." *Economic Journal,* 49, 143, pp. 14-33.

Harrod, Roy Forbes (1966). *Hacia una economía dinámica*. Madrid: Tecnos.

Harrod, Roy Forbes (1979). *Dinámica económica*. Madrid: Alianza Editorial.

Heston, Alan; Robert Summers and Bettina Aten (2002). *Penn World Table Version 6.1*. Center for International Comparisons of Production, Income and Prices at the University of Pennsylvania (CICUP).

Keynes, John M. (1935). *Teoría general de la ocupación, el interés y el dinero*. Quinta reimpresión. Bogotá: Fondo de Cultura Económica.

Kotlikoff, Laurence (1998). "The AK model: Its past, present, and future." *Working Paper* (National Bureau of Economic Research), 6688, 34 pp.

Li, Dajin (2002). "Is the AK model still alive? The long-run relation between growth and investment re-examined." *Canadian Journal of Economics*, 1 (February 2002), pp. 92-114.

Meade, James (1971). "El resultado del proceso Pasinetti", en Harcourt, G. C. y N. F. Laing (eds.).

Meza C., Carlos (2012). *Econometría de series de tiempo: Elementos y fundamentos*. Madrid: Editorial Académica Española.

Samuelson, Paul (1939)."Interactions between the multiplier analysis and principle of acceleration." *The Review of Economic Statics,* 21, 2, pp. 75-78.

Thirlwall, Anthony and Hussein Khaled (2000). "The AK model of new growth theory is the Harrod-Domar growth equation: Investment and growth revisited." *Journal of Post Keynesian Economics*, 22, 3 (Spring, 2000), pp. 427-435.

Thirlwal, Anthony (2001). "The relation between the warranted growth rate, the natural rate, and the balance of payments equilibrium growth rate." *Journal of Post Keynesian Economics*, 24, 1 (Autumn, 2001), pp. 81-88.

Thirlwal, Anthony (1979). "Import penetration, export performance and Harrod´s trade multiplier." *Oxford Economic Papers New Series*, 31, 2 (July, 1979), pp. 303-323.

Tripathy, R. (2003). "Macro-models for poverty reduction policies: Comparison of key features." Brussels: Eurodad, Economic Policy Empowerment Programme (EPEP) and London: Bretton Woods Project; available at: http://www.ifpri.org/events/seminars/2003/20031014/other.htm#papers.

United Nations Economic Commission for Europe (2000). "Financing growth and development in the transition economies: The role of domestic savings." Economic Analysis Division, UN/ECE. Regional Conference in Cooperation with the EBRD and UNCTAD, 6-7 December.