Economía, XII, 1 (1987), pp. 53-66

Fundamentos matemáticos sobre los números índices

Mathematical foundations of index numbers

Efraín A. López*

Se expondrá en este artículo un ingenioso método matemático para obtener las fórmulas sobre los números índices. El mismo fue ideado por F. Divisia en 1925-1926, y en este trabajo se hace una extensión a otros índices más comunes en la literatura de la Estadística Económica. Está basado en la utilización de una ecuación diferencial general, cuya solución particular bajo determinadas condiciones iniciales da origen a los números índices: Laspeyres, Paashe, Fisher, Marshall y Keynes.

Supongamos que el valor de un conjunto de artículos, en un período "t", puede ser expresado como:

$$V_t = \sum_{i=1}^{i=n} p_{it} * q_{it} = P_t * Q_t$$

Donde Pt representa el nivel general de precios en el período "t" y Qt el volumen total físico en el mencionado período. Si estamos interesados en la medida del nivel de precios Pt, entonces cualquier cambio en el valor de Vt, puede ser el resultado de un cambio en los precios o un cambio en las cantidades consumidas. Por lo tanto, diferenciando se tiene:

$$dV_t = P_t \; dQ_t + Q_t \; dP_t$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} (P_{it} \, dq_{it} + q_{it} \, dp_{it})$$

* Universidad de Los Andes, Facultad de Economía

==========> $$\frac{dVt}{Pt\,Qt} = \frac{P_t\,dQt + Qt\,dPt}{Pt \quad Qt}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_t\,dQ_t + Q_t\,dP_t}{P_t\,Q_t}$$

==========> $$\frac{dQ_t}{Q_t} + \frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n}(p_{it}\;dq_{it} + q_{it}\;dp_{it})}{P_t \quad Q_t}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{i=n}(p_{it}\;dq_{it} + q_{it}\;dp_{it})}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\;q_{it}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\;dq_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\;q_{it}} + \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\;dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\;q_{it}}$$

Separando esta última ecuación en dos ecuaciones diferenciales, se tiene:

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_t}{Q_t} = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\;dq_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\;q_{it}} & \text{(I)} \\[2em] \dfrac{dP_t}{P_t} = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\;dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\;q_{it}} & \text{(II)} \end{cases}$$

Consideremos la segunda ecuación diferencial, y supongamos que las cantidades consumidas q_{it} en el período comparado, son proporcionales a aquellas consumidas en el período base “o”, es decir:

==========> $$\frac{q_{it}}{q_{io}} = k$$

$$q_{it} = k\ q_{io}$$

Por lo tanto:

$$\frac{dP_t}{Pt} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\ dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\ q_{it}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} k\ q_{io}\ dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} k\ q_{io}\ p_{it}}$$

$$= \frac{d\,(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{io})}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{io}}$$

Donde Pt y p_{it} son variables y $q_{it} = k\ q_{io}$ es constante. Integrando ambos miembros de esta última ecuación:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{d\,(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{io})}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{io}}$$

==========> $$\log P_t = \log\,((\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{io}) + C_1$$

Donde C_1 es una constante arbitraria y cuyo valor puede ser obtenido mediante ciertas condiciones iniciales.
Impongamos como condición inicial que:

$$Q_o = \exp(-C_1)$$

Donde exp = 2.7281 y Q_0 es el volumen total físico en el período "0".

Puesto que:

$$V_o = P_o Q_o = \sum_{i=1}^{i=n} p_{io} q_{io}$$

==========> $$\frac{P_o}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} q_{io}} = \frac{1}{Q_o} = \exp(C_1)$$

==========> $$\exp(C_1) = \frac{P_o}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} q_{io}}$$

==========> $$C_1 = \log\left(\frac{P_o}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} q_{io}}\right)$$

Reemplazando este valor en la relación anterior, tenemos:

$$\log P_t = \log\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{io}\right) + \log\left(\frac{P_o}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} q_{io}}\right)$$

==========> $$\log P_t = \log\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{io}\right) + \log P_o - \log\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} q_{io}\right)$$

==========> $$\log P_t - \log P_o = \log\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{io}\right) - \log\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} q_{io}\right)$$

==========> $$\log(\frac{P_t}{P_o}) = \log\left[\frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{io}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io}\, q_{io}}\right]$$

Tomando antilogaritmo en ambos miembros, se tiene:

$$\frac{P_t}{P_o} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{io}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io}\, q_{io}}$$

Esta última expresión corresponde, como ya bien sabemos, a la definición del Índice de Precios de Laspeyres.
De la misma ecuación diferencial (II):

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}}$$

Podemos obtener la correspondiente fórmula para el índice de precios de Paashe. Para ello cambiemos el subíndice "t" por el subíndice "j":

==========> $$\frac{dP_j}{P_j} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{ij}\, dp_{ij}}{\sum_{i=1}^{i=n} q_{ij}\, p_{ij}}$$

Supongamos ahora que las cantidades consumidas en el período comparado son proporcionales a aquellas consumidas en un período, di gamos "t", es decir:

$$q_{ij} = k\, q_{it}$$

==========> $$\frac{dP_j}{P_j} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} k\, q_{it}\, dp_{ij}}{\sum_{i=1}^{i=n} k\, q_{it}\, p_{ij}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, dp_{ij}}{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, p_{ij}}$$

Integrando ambos miembros, tenemos:

$$\frac{dP_j}{P_j} = \frac{d\,(\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, p_{ij})}{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, p_{ij}}$$

==========> $$\log P_j = \log\,(\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, p_{ij}) + C_2$$

Donde, al igual que en el caso anterior, C_2 es una constante arbitraria y cuyo valor puede ser obtenido mediante condiciones iniciales.

Supongamos que: $Q_t = \exp(-C_2)$

$$\exp(C_2) = \frac{P_t}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}}$$

==========> $$C_2 = \log\left[\frac{P_t}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}}\right]$$

$$\log P_j = \log \left(\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, p_{ij}\right) + \log \left[\frac{P_t}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}}\right]$$

$$\log P_j = \log \left(\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, p_{ij}\right) - \log \left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}\right) + \log P_t$$

$$==========> \quad \log P_j - \log P_t = \log \left(\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, p_{ij}\right) - \log \left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}\right)$$

$$==========> \qquad \log\left(\frac{P_j}{P_t}\right) = \log\left[\frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, p_{ij}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}}\right]$$

Tomando antilogaritmo, tenemos:

$$======> \qquad \frac{P_j}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, p_{ij}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}}$$

Invirtiendo esta última relación, se tiene:

$$\frac{P_t}{P_j} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{ij}\, q_{it}}$$

Si ahora hacemos j = 0, tendremos:

$$\frac{P_t}{P_o} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io}\, q_{it}}$$

Expresión que corresponde a la fórmula del Índice de Precio de Paasche en el período "t" con base el período "0".

Partiendo de nuestra ecuación inicial, es también fácil encontrar el Índice de Precios de Marshall-Edgeworth. Para ello, supongamos que:

$$\begin{cases} \text{i)} & 0 < j < t \\ \text{ii)} & q_{ij} = k_1 \, (q_{io} + q_{it}) \\ \text{iii)} & p_{ij} = k_2 \, p_{it} \\ \text{iv)} & p_j = k_3 \, p_t \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\frac{dP_j}{P_j} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{ij} \, dp_{ij}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{ij} \, q_{ij}} = \frac{d\,(k_3 P_t)}{k_3 \, P_t}$$

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} k_1 \; (q_{io} + q_{it}) \cdot k_2 (dp_{it})}{\sum_{i=1}^{i=n} k_1 \, (q_{io} + q_{it}) \cdot k_2 \, p_{it}} \qquad = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \; (q_{io} + q_{it}) dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} \, (q_{io} + q_{it})}$$

$$= \frac{d \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} \; (q_{io} + q_{it}) \, p_{it} \right\}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} \, (q_{io} + q_{it})}$$

Integrando ambos miembros, se obtiene que:

$$\log P_t = \log \left[\sum_{i=1}^{i=n} (q_{io} + q_{it}) \, p_{it} \right] + C_3$$

Considerando como condición inicial:

$$C_3 = \log \left[\frac{P_O}{\sum_{i=1}^{i=n} P_{io} \, (q_{io} + q_{it})} \right]$$

Tenemos: $$\log P_t = \log\left[\sum_{i=1}^{i=n} (q_{io} + q_{it})\, p_{it}\right] + \log\left(\frac{P_o}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io}\,(q_{io} + q_{it})}\right)$$

======> $$\log\left(\frac{P_t}{P_o}\right) = \log\left[\frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\,(q_{io} + q_{it})}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io}\,(q_{io} + q_{it})}\right]$$

======> $$\frac{P_t}{P_o} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\,(q_{io} + q_{it})}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io}\,(q_{io} + q_{it})}$$

Fórmula que corresponde al Índice de Precios de Marshall-Edgeworth.

Igual argumentación puede utilizarse para encontrar la fórmula del Índice de Precios de Keynes.

Vamos a encontrar a continuación, la fórmula del Índice de Precios de Fisher. Partiremos de la misma ecuación inicial:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, p_{it}}$$

Particionaremos la sumatoria del numerador en el segundo miembro en dos partes de la siguiente manera:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, dp_{it} + \sum_{i=n_1+1}^{i=n} q_{it}\, dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}}\right]$$

$$\frac{dP_t}{P_t} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it}\, dp_{it} + \sum_{j=1}^{j=n_2} q^{*}_{jt}\, dp^{*}_{jt}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}}\right]$$

Donde:

$$\begin{cases} \overset{*}{q}_{j,t} = q_{n1+i,t} \\ \overset{*}{p}_{j,t} = q_{n1+i,t} \\ j = i = 1,2,3\ldots \ \ldots n_2 \end{cases}$$

======> $$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it}\, dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}} + \frac{\sum_{j=1}^{j=n_2} \overset{*}{q}_{jt}\, d\overset{*}{p}_{jt}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}}$$

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it}\, dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it}\, p_{it}} \times \frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it}\, p_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}} + \frac{\sum_{j=1}^{j=n_2} \overset{*}{q}_{jt}\, d\overset{*}{p}_{jt}}{\sum_{i=1}^{i=n_2} \overset{*}{q}_{jt}\, \overset{*}{p}_{jt}} \times \frac{\sum_{j=1}^{j=n_2} \overset{*}{q}_{jt}\, \overset{*}{p}_{jt}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}\, q_{it}}$$

======> $$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it}\, dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it}\, p_{it}} \times a_1 + \frac{\sum_{j=1}^{j=n_2} \overset{*}{q}_{jt}\, d\overset{*}{p}_{jt}}{\sum_{j=1}^{j=n_2} \overset{*}{q}_{jt}\, \overset{*}{p}_{jt}} \times a_2$$

En que:

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it}\, p_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it}\, p_{it}} \qquad a_2 = \frac{\sum_{j=1}^{j=n_2} \overset{*}{q}_{jt}\, d\overset{*}{p}_{jt}}{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it}\, p_{it}}$$

Y además:

$$\sum_{k=1}^{k=n_2} a_k = 1$$

Sean:

$$\frac{dP_1}{P_1} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it}\, dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it}\, p_{it}} \tag{1}$$

$$\frac{dP_2}{P_2} = \frac{\sum_{j=1}^{j=n_2} \overset{*}{q}_{jt}\, d\overset{*}{p}_{jt}}{\sum_{j=1}^{j=n_2} \overset{*}{q}_{jt}\, \overset{*}{p}_{jt}} \qquad (2)$$

======> $$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{dP_1}{P_1} \times a_1 + \frac{dP_2}{P_2} \times a_2$$

Si en la ecuación (1) hacemos $q_{it} = k\, q_{io}$, se tiene:

$$\frac{dP_1}{P_1} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{io}\, dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{io}\, p_{it}}$$

Integrando, se obtiene:

$$\log P_1 = \log \left(\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{io} + p_{it} \right) + C_1$$

Donde C_1 es una constante arbitraria.
De la Ecuación (2), se obtiene:

$$\frac{dP_2}{P_2} = \frac{\sum_{j=1}^{j=n_2} \overset{*}{q}_{jt}\, d\overset{*}{p}_{jt}}{\sum_{j=1}^{j=n_2} \overset{*}{q}_{jt}\, \overset{*}{p}_{jt}}$$

======> $$\log P_2 = \log \left(\sum_{j=1}^{j=n_2} \overset{*}{q}_{jt}\, \overset{*}{p}_{jt} \right) + C_2$$

Sumando las ecuaciones (3) y (4), se tiene:

$$\log P_1 + \log P_2 = \log \left(\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{it}\, q_{io} \right) + \log \left(\sum_{j=1}^{j=n_2} \overset{*}{q}_{jt}\, \overset{*}{P}_{jt} \right) + C_3$$

En que $C_3 = C_1 + C_2$

$$\text{======>} \qquad \log (P_1 \cdot P_2) = \log \{(\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{it}\, q_{io}) \cdot (\sum_{j=1}^{j=n_2} \overset{*}{P}_{jt}\, q_{jt})\} + C_3$$

Pero sabemos que:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{dP_1}{P_1} \times a_1 + \frac{dP_2}{P_2} \times a_2$$

Y además: $$\sum_{k=1}^{k=2} a_k = 1$$

Tomemos $a_1 = a_2 = 1/2$

$$\text{======>} \qquad \frac{dP_t}{P_t} = \frac{1}{2}\left(\frac{dP_1}{P_1} + \frac{dP_2}{P_2}\right)$$

Integrando miembro a miembro obtenemos:

$$\log P_t = 1/2 \log (P_1 \cdot P_2) + C_4 \qquad (6)$$

Reemplazando (5) en (6):

$$\log P_t = 1/2 \log \{(\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{it}\, q_{io}) \cdot (\sum_{j=1}^{j=n_2} \overset{*}{p}_{jt}\, \overset{*}{q}_{jt})\} + C$$

Donde $C = C_3 + C_4$

$$\log P_t = \log \left[(\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{it}\, q_{io}) \cdot (\sum_{j=1}^{j=n_2} \overset{*}{p}_{jt}\, \overset{*}{q}_{jt}) \right]^{1/2} + C$$

Si los precios en el período base "0" son p_{io} y el nivel de precios es P_o, entonces:

$$\log P_o = \log \left[(\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{io}\, q_{io}) \cdot (\sum_{j=1}^{j=n_2} \overset{*}{p}_{jo}\, \overset{*}{q}_{jt}) \right]^{1/2} + C$$

$$======> \qquad C = \log \frac{P_O}{\left[\left(\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{io}\, q_{io} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{j=n_2} p^*_{jo}\, q^*_{jt} \right) \right]^{1/2}}$$

Reemplazando el valor de C en la ecuación (7):

$$\log P_t = \log \left[\left(\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{it}\, q_{io} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{j=n_2} p^*_{jt}\, q^*_{jt} \right) \right]^{1/2}$$

$$+ \ \log \frac{P_O}{\left[\left(\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{io}\, q_{io} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{j=n_2} p^*_{jo}\, q^*_{jt} \right) \right]^{1/2}}$$

$$\log \left(\frac{P_t}{P_o} \right) = \log \left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{it}\, q_{io}}{\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{io}\, q_{io}} \right) \cdot \left(\frac{\sum_{j=1}^{j=n_2} p^*_{jt}\, q^*_{jt}}{\sum_{j=1}^{j=n_2} p^*_{jo}\, q^*_{jt}} \right) \right]^{1/2}$$

Al tomar antilogaritmo, se obtiene:

$$\frac{P_t}{P_o} = \left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{it}\, q_{io}}{\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{io}\, q_{io}} \right) \cdot \left(\frac{\sum_{j=1}^{j=n_2} p^*_{jt}\, q^*_{jt}}{\sum_{j=1}^{j=n_2} p^*_{jo}\, q^*_{jt}} \right) \right]^{1/2}$$

Fórmula que corresponde al Índice de Precios de Fisher en el período “t” con base el período “0”.

Si en cambio se utiliza la ecuación diferencial (I) y para los precios se consideran supuestos análogos a los establecidos para las cantidades, se puede obtener de manera semejante los correspondientes índices de cantidades de Laspeyres, Paasche, Fisher, Marshall, Edgeworth y Keynes.

Referencias

Banerjee, Kali S. (1975). *Cost of Living Index Numbers*, Marcel Dekker, Inc. New York.

Davis, H.T. (1947). *The Theory of Econometrics*, Bloomington, Indiana, Principia Press-

Divisia, F. (1927). *Economique Rationnelle*, 367-433, Paris.

Divisia, F. (1926). L´indice Monetaire et les Theories de la Monnaje. *Rev. Econo. Politique*, 39, 842-861, 980-1008, 1121-1151 (1925); 40, 49-87.