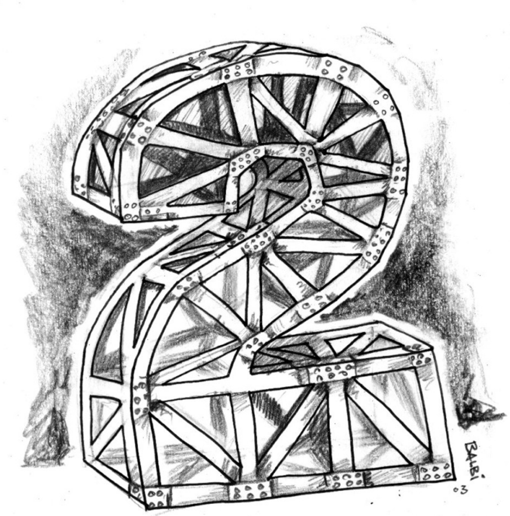
Conocimiento sobre proporcionalidad de futuros profesores de matemática. Un estudio exploratorio

Learning about proportionality in future mathematics teachers. An exploratory study

Mauro Rivas Olivo
rmauro@ula.ve

Yazmary Rondón
yrondon@ula.ve
Universidad de Los Andes.
Departamento de Medición y Evaluación
Mérida, estado Mérida. Venezuela

María Burgos
mariaburgos@ugr.es
Universidad de Granada
Facultad de Ciencias de la Educación
Granada. España



Artículo recibido: 04/04/2019
Aceptado para publicación: 11/07/2019

Resumen

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación, dirigido a atender deficiencias de futuros profesores de matemática sobre la proporcionalidad. Se informa sobre los resultados de un proceso de diagnóstico en torno al conocimiento de la proporcionalidad, observado en una sección de estudiantes del octavo semestre (último) de la carrera de educación matemática. La metodología desarrollada es de tipo investigación-acción. Los resultados indican que los futuros profesores de matemática muestran un conocimiento sesgado sobre la proporcionalidad, basado en aspectos parciales que no caracterizan esa noción. Se concluye sobre la necesidad de una "reconstrucción integral" del conocimiento de la proporcionalidad en la formación de futuros profesores.

Palabras clave: Conocimiento de la proporcionalidad, formación inicial de profesores, razonamiento proporcional, educación matemática, enfoque onto-semiótico.

Abstract

This work is part of a research project, aimed at addressing deficiencies on proportionality of prospective mathematics teachers. It reports on the results of a diagnostic process around the knowledge of proportionality, observed in a section of students in the eighth (last) semester of the mathematical education career. The methodology applied is action-research. The results indicate that prospective mathematics teachers show a biased knowledge about proportionality based on partial aspects that do not characterize that notion. It concludes on the need for a "global re-construction" of the knowledge on proportionality in the preservice teachers training.

Key words: Knowledge of proportionality, initial teacher training, proportional reasoning, mathematics education, onto-semiotic approach.

Introducción

El problema sobre la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad, aun cuando ha sido extensamente estudiado, persiste y continúa vigente (Jitendra, Star, Dupuis & Rodríguez, 2013; Small, 2015). Particularmente, en el ámbito de la formación inicial de profesores, el conocimiento sobre la proporcionalidad constituye un aspecto de interés (Ben-Chaim, Keret & Ilany, 2012; Livy & Herbert, 2013).

Diversas investigaciones señalan que los futuros profesores muestran carencias en el conocimiento de la proporcionalidad y en el conocimiento necesario para su enseñanza (Ben-Chaim, Keret & Ilany, 2012; Buforn & Fernández, 2014; Monteiro, 2003, Rivas, Godino & Castro, 2012). En este sentido, se considera relevante investigar, en el ámbito local, lo relativo a la siguiente inquietud: ¿Cuáles son las posibles deficiencias de los futuros profesores de matemática sobre el conocimiento de la proporcionalidad?

Con el fin de abordar este problema se ha iniciado el desarrollo de un proyecto de investigación que tiene lugar con la puesta en juego de una serie de actividades de formación de futuros profesores de matemática, en torno a la proporcionalidad y al conocimiento matemático necesario para su enseñanza.

El proyecto de investigación en desarrollo comprende los siguientes momentos: (a) aplicación de una prueba diagnóstico sobre proporcionalidad, (b) valoración de los resultados del diagnóstico, (c) implementación de material instruccional sobre proporcionalidad, que incluye las actividades a ser realizadas por los futuros profesores, (d) seguimiento de la realización de las actividades propuestas en el material instruccional, y (e) aplicación de una pauta para valorar los resultados del proceso de instrucción desarrollado.

En este documento se informa sobre resultados de los dos primeros momentos de este proyecto, a saber, lo relativo al proceso de diagnóstico y la valoración de los resultados del mismo. Es decir, se presentan los resultados sobre la aplicación de un instrumento dirigido a detectar posibles deficiencias, en torno al conocimiento de la proporcionalidad, de los futuros profesores de matemática que cursan el último semestre de la carrera de Educación Matemática en la Universidad de Los Andes (Venezuela).

Objetivos de la investigación

General

- Realizar un diagnóstico sobre el conocimiento de la proporcionalidad de estudiantes del último semestre de la carrera de Educación Matemática.

Específicos

- Valorar el grado de corrección de las respuestas dadas por futuros profesores a problemas de proporcionalidad, propuestos en una prueba diagnóstico.
- Describir los procedimientos empleados por los futuros profesores para resolver situaciones problema referidas a la proporcionalidad.
- Identificar posibles deficiencias sobre el conocimiento en torno a la proporcionalidad y su enseñanza, de los futuros profesores de matemática.
- Determinar posibles conflictos potenciales en el proceso de adquisición del conocimiento en torno a la proporcionalidad por futuros profesores de matemática.

Marco teórico

Estudios previos sobre el conocimiento de la proporcionalidad de futuros profesores han permitido, por medio de la realización de análisis didácticos (epistémico/cognitivos), basados en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero & Font, 2007), identificar objetos y significados puestos en juego en la resolución de problemas de proporcionalidad (Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos & Giacomone, 2017; Rivas, Godino & Castro, 2012). Específicamente, en Rivas (2013, pp. 213-233), se ha hecho uso de la herramienta "Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados" (GROS), para realizar un análisis epistémico/experto de los ítems del instrumento que se aplica en la presente investigación. Por motivos de espacio, no se presentan detalles de tal uso.

Tomando en cuenta las aportaciones provenientes de la literatura especializada y los hallazgos obtenidos por medio de la GROS, se ha logrado identificar elementos caracterizadores de la noción de proporcionalidad, a saber:

a. *Aspectos estructurales*, requeridos para avanzar de formas de razonamiento aditivo a formas de razonamiento multiplicativo (Fernández & Llinares, 2011; Kenney, Lindquist & Heffernan, 2002; Lesh, Post & Behr, 1988; Van Dooren, De Bock & Verschaffel, 2010; Vergnaud 1988).
b. *Sentido de covariación entre magnitudes*, cuya precisión depende de la comprensión de la condición "constante", apoyada por la noción de linealidad, que permite distinguir entre relaciones proporcionales y no proporcionales (Fernández & Llinares, 2011; Izsák, & Jacobson, 2017; Lamon, 2007; Lee & Yim, 2014).
c. *El sentido de razón como relación multiplicativa que se aplica para generar una nueva unidad*, la cual permite organizar aspectos intervinientes en situaciones proporcionales y no proporcionales (Buforn & Fernández, 2014; Fernández & Llinares, 2011; Freudenthal, 1983; Lamon, 2007).
d. *Relaciones de equivalencia o no equivalencia*, que permiten distinguir en una misma noción la manifestación de relaciones que permanecen constantes (proporción, identidad, razón) y otras que si varían (componentes de la razón, relación que los pone en correspondencia) (Fernández Lajusticia 2009; Fernández & Llinares, 2011; Lamon, 2007).
e. *Razonamientos cualitativos y cuantitativos*, que indican el desarrollo natural de la noción de proporcionalidad e incluye el uso de reglas intuitivas de covariación entre magnitudes, pero que requiere de la precisión numérica o relación constante que debe caracterizar la covariación (intuitivo-numérico, inductivo-deductivo, informal-formal) (Godino et al., 2017; Koellner-Clark & Lesh, 2003; Lamon, 2007).
f. *Relaciones escalares y funcionales*, relativas a las que se establecen entre cantidades extensivas e intensivas que diferencian una razón de una tasa de cambio (Fernández Lajustucia 2009; Freudenthal, 1983; Vergnaud 1988).
g. *Relaciones aritmético-algebraico-funcional*, relativas al desarrollo intra-matemático de la noción de proporcionalidad que comprende avanzar desde lo numérico hacia formas más generales de índole algebraica y funcional (Freudenthal, 1983; Godino et al., 2017).
h. *Aspectos contextuales o ámbitos de uso*, referidos a diferentes factores que intervienen en las situaciones en las que se precisa el uso de un razonamiento proporcional o diferentes contextos de uso de ese razonamiento (Godino, et al., 2017; Lamon, 2007; Tournaire & Pulos, 1985; Smith, 2002).

La identificación de estos elementos, en torno al desarrollo del razonamiento proporcional, permite una aproximación a la complejidad epistémico/cognitiva relativa a la construcción de la noción de proporcionalidad. Se reconoce como aspecto común de estos elementos el significado: *relación de covariación constante entre las cantidades de magnitudes*. Es decir, entre dos magnitudes directamente proporcionales existe una relación de covariación (ambas cambian simultáneamente) y una relación de invariancia, entendida como la igualdad entre la razón de dos cantidades de una magnitud y la razón de las cantidades correspondientes de la otra magnitud. El modelo matemático para la relación de proporcionalidad directa es del tipo $y = kx$, de manera que

EDUCERE - Investigación Arbitrada - ISSN: 1316-4910 - Año 23 - Nº 76 - Septiembre - Diciembre 2019 / 761 - 777

cuando dos magnitudes son directamente proporcionales, varían de forma que se mantiene constante la razón $k = y/x$. Este significado se considera caracterizador de la proporcionalidad en el desarrollo de este trabajo.

En sentido contrario a la complejidad antes referida, de acuerdo con diversas investigaciones (Kenney, Lindquist & Heffernan, 2002; Lamon, 2007; Lesh, Post & Behr, 1988; Tjoe & de la Torre, 2014), la práctica de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad se realiza reduciendo los procedimientos de resolución de problemas al uso de reglas que se aprenden-aplican de manera automática y memorística, sin que medie la manifestación del razonamiento proporcional pretendido, evadiendo la puesta en juego de alguno de los elementos caracterizadores de la proporcionalidad antes referidos. Este tipo de situaciones se agrava cuando es el profesor quien resuelve los problemas sin involucrar el razonamiento proporcional que debería tener lugar (Ben-Chaim, Keret & Ilany, 2012; Izsák, & Jacobson, 2017; Monteiro, 2003; Rivas, Godino & Castro, 2012).

En este orden de ideas, se considera necesario obtener información sobre la forma en que los futuros profesores resuelven problemas de proporcionalidad, teniendo como referente la complejidad antes referida, para hacer la valoración de las resoluciones que ellos realizan. Tal valoración permitirá determinar posibles deficiencias mostradas por los futuros profesores de la muestra al resolver los problemas correspondientes.

Marco metodológico

La metodología de trabajo a desarrollar en el proyecto de investigación formulado corresponde a una investigación de corte cualitativa y consiste en llevar a efecto el primer ciclo de una investigación-acción, de acuerdo con la propuesta de Cohen, Manion & Morrison (2011). En la Figura 1, se presenta una articulación de los diferentes procedimientos que serán ejecutados, de acuerdo con la propuesta de los autores referidos.

Como hemos mencionado, en el presente documento se informa de lo relativo al procedimiento *identificación del problema*, el cual comprende la realización de un diagnóstico y la valoración de los resultados del mismo a la luz de las aportaciones de los análisis epistémicos/cognitivos realizados en investigaciones previas y de la literatura especializada sobre el desarrollo de la noción de proporcionalidad.

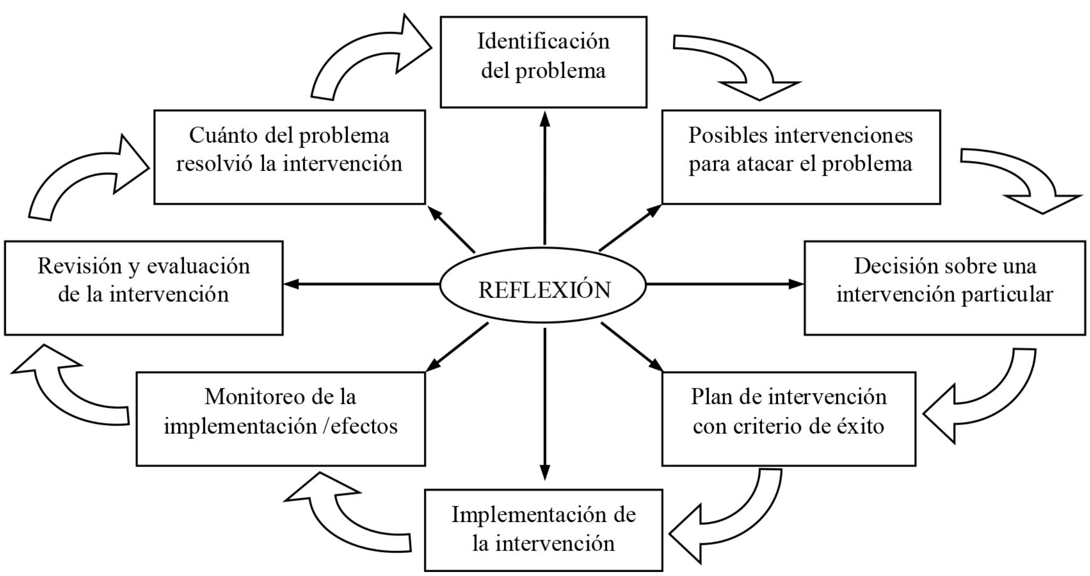


Fig.1. Proceso de investigación-acción.

Fuente: Adaptado de Cohen, Manion & Morrison (2011, p. 355).

- **Sujetos participantes:** Los participantes son 13 futuros profesores inscritos-asistentes en una sección del octavo semestre (último) de la carrera de Educación Matemática, en la asignatura Taller de Análisis Curricular de la Matemática, en el periodo académico A-2017, de la Escuela de Educación de la Universidad de Los Andes. La elección de los participantes se hizo de manera incidental, no aleatoria, con un muestreo *a propósito*, puesto que tal elección se realiza sobre la base del criterio: estudiante inscrito en la asignatura, asistente a la aplicación del instrumento (Cohen, Manion & Morrison, 2011).
- **Instrumento y datos:** Los datos se han obtenido por medio de la aplicación de un instrumento (ver Anexo), tipo prueba de desarrollo. Los datos consisten en las repuestas dadas por los participantes a los ítems de la prueba.

  La prueba aplicada está dirigida al diagnóstico de los conocimientos previos que tienen los futuros profesores sobre la proporcionalidad y consta de cuatro ítems que versan sobre : (a) resolución de un problema de valor faltante proporcional, (b) uso de tablas y representaciones gráficas en torno a la proporcionalidad, (c) situaciones problema proporcionales y no proporcionales, y (d) conocimiento didáctico inicial en torno a la proporcionalidad: definición, ejemplificación y representación tabular y gráfica de magnitudes proporcionales.
- **Técnicas de análisis de datos:** Las técnicas de análisis que se han utilizado son de dos tipos: (a) uso de herramientas de estadística elemental; como el análisis de frecuencias y porcentajes, y (b) análisis didáctico de las respuestas dadas por los sujetos a los ítems de la prueba, a la luz de las aportaciones de los estudios epistémicos/cognitivos expertos (uso de la GROS) y de las contribuciones de la literatura especializada consultada. Para el análisis de los datos del ítem 1 (un problema de valor faltante proporcional de magnitudes intensivas) se emplean las categorías que se describen en el Cuadro 1.

Cuadro 1. Categorías para la valoración de las respuestas del ítem 1

	Categoría	Descripción
Ítem 1/problema de valor faltante proporcional de cantidades intensivas	Informal/ Incompleta	Se refiere a no realizar un procedimiento detallado y/o pertinente del proceso de resolución, en su lugar proveer el resultado de manera más o menos directa o errónea.
	Aritmética	Se refiere a un procedimiento en el que no se usa una incógnita para hallar el valor faltante del problema.
	Algebraica	Corresponde al uso de la incógnita para el valor faltante del problema

Para el análisis de los datos del ítem 2, en el que se solicita: (a) reconocimiento de magnitudes proporcionales propuestas en una tabla de valores y (b) representación cartesiana de esos valores, el énfasis se pondrá en las características de la representación gráfica de una relación proporcional. Esto se debe a que no se solicita argumentar sobre el reconocimiento de magnitudes proporcionales, por tanto, la esencia de lo solicitado en el ítem se centra en la representación cartesiana de una relación proporcional.

Las características tomadas en cuenta para la representación gráfica de una relación de proporcionalidad se presentan en el Cuadro 2. Asimismo, en ese cuadro, se presenta el criterio que se aplica para decidir si el origen de coordenadas ha sido tomado en cuenta por los sujetos, como punto que pertenece (no pertenece) a la gráfica de la relación.

En el ítem 3 se solicita: (a) determinar si dos magnitudes dadas son directamente proporcionales, de una lista de tres pares de magnitudes, y (b) justificar la respuesta. De los tres pares de magnitudes propuestas en este ítem, sólo un par de ellas es de magnitudes proporcionales, esto deberá ser identificado y argumentado en las respuestas de los participantes. En el Cuadro 3 se presentan los pares de magnitudes y su valoración como proporcional/no-proporcional.

EDUCERE - Investigación Arbitrada - ISSN: 1316-4910 - Año 23 - Nº 76 - Septiembre - Diciembre 2019 / 761 - 777

Cuadro 2. Características de la representación gráfica de una relación de proporcionalidad y criterio para decidir si el origen pertenece (no pertenece) a la relación

Características
a. La orientación lineal de los puntos de la relación proporcional
b. El origen del sistema de coordenadas cartesianas como punto que pertenece a la gráfica de la relación. **Criterio**: Se acepta que si al trazar una línea recta por los puntos representados, esta pasa (no pasa) por el origen entonces se considerará que la disposición lineal de los puntos hace que el origen pertenezca (no pertenezca) a la relación representada.
c. Uso adecuado de una escala.

Cuadro 3. Pares de magnitudes propuestas en el ítem 3 y su valoración sobre la proporcionalidad

Pares de magnitudes	Valoración de la proporcionalidad
Lado del cuadrado y su superficie	No proporcional, puesto que no tiene la forma y = kx, donde x, y son valores de las magnitudes consideradas y k es la constante de proporcionalidad.
Lado del cuadrado y su perímetro	Proporcional, puesto que la relación entre el lado l del cuadrado y su perímetro p es de la forma p = 4l, siendo 4 la constante de proporcionalidad.
Edad y altura de las personas	No proporcional, puesto que no es posible establecer una relación constante en la covariación entre edad y altura de las personas.

Para la valoración del ítem 4, serán considerados algunos tipos de explicaciones identificadas en Rivas (2013). En tal sentido, una explicación se considera parcial si se refiere a aspectos particulares, no caracterizadores, de la noción de proporcionalidad, por ejemplo: uso de reglas intuitivas de comparación, relación numérica no constante entre magnitudes, interpretaciones a partir de representaciones en tablas o gráficos, intuitivo y circular. Una explicación se considera completa si se hace un uso apropiado de la proporcionalidad como *relación constante entre las covariaciones de cantidades de magnitudes*, o también como *relación constante entre razones*, la cual se considera como un significado caracterizador de la proporcionalidad que se complementa con (y da sentido a) los aspectos parciales referidos. Una descripción de las categorías mencionadas se presenta en el Cuadro 4.

Cuadro 4. Categorías de algunos tipos de explicación en torno a magnitudes proporcionales expresadas por futuros profesores

Explicación	Categorías	Descripción
Parcial	Uso de regla intuitiva-cualitativa o de covariación	Uso de argumentaciones basadas en reglas del tipo: "más en A, más en B" o covariaciones cualitativas / cuantitativas entre las magnitudes consideradas.
	Relación numérica no constante	Sustentada en algún tipo de relación numérica (adición, multiplicación, división) deducida por los estudiantes a partir de algunas regularidades observadas en las sucesiones de pares de números proporcionales observadas en tablas o en gráficos.
	Uso de una representación (tabla o gráfico)	Se refiere a que la representación gráfica de una relación entre magnitudes proporcionales viene dada por una línea recta o de un conjunto de puntos linealmente orientados.
	Intuitivo	Se refiere a descripciones muy generales satisfechas por las magnitudes proporcionales (relación, dependencia, semejanza,…) indicadas por la lógica.
	Circular	Explicar las magnitudes proporcionales utilizando el término "proporción" o "proporcionalidad".
Completa	Relación de covariación constante entre razones	Las magnitudes A y B son proporcionales si cuando la cantidad a de A varía un número k de veces, entonces la cantidad b de B varía ese mismo número k de veces.

Resultados

Una primera valoración de las respuestas dadas por los sujetos a los ítems del instrumento se presenta en la Tabla 1. Se observa que la mayoría de los sujetos (más del 80%, en promedio) proveen de una respuesta correcta a buena parte de los ítems del instrumento. Los ítems que obtienen pocas respuestas correctas, o no tienen, son: (i) el ítem 3 (en la parte que se solicita justificar las respuestas), para el cual sólo 1 sujeto (7,7%) da una respuesta correcta y (ii) el ítem 4 en varias de sus partes. Son notorias, en el ítem 4, la parte en que se solicita definir magnitudes directamente proporcionales, para la cual ningún sujeto da una respuesta correcta. Asimismo, la parte en que se solicita representar gráficamente magnitudes proporcionales, para la cual sólo un sujeto (7,7%) provee de una representación correcta. Otra de las partes de este ítem, que no es resuelta correctamente por la mayoría de los sujetos, es en la que se solicita dar un ejemplo de magnitudes proporcionales, sólo cinco sujetos (38,5%) dan una respuesta correcta a esta parte. A continuación se presentan resultados más detallados sobre las respuestas dadas a los ítems del instrumento por parte de los participantes.

Tabla 1. Resumen de las respuestas correctas dadas por los futuros profesores a los ítems del instrumento (N = 13)

Ítem	Tipo de problema	Frecuencias	
		Nº	%
Ítem 1	Problema de valor faltante proporcional	13	100,0
Ítem 2	a) Tabla de magnitudes proporcionales (múltiplos de 7)	13	100,0
	b) Tabla de magnitudes proporcionales (múltiplos de 9)	12	92,3
	c) Tabla de magnitudes proporcionales (múltiplos de 100)	13	100,0
Ítem3	a) Situación no proporcional: lado del cuadrado y su superficie	11	84,6
	b) Situación proporcional: lado del cuadrado y su perímetro	13	100,0
	c) Situación no proporcional: edad y altura de las personas	11	84,6
	d) Justifica sus respuestas	1	7,7
Ítem 4	a) Define magnitudes directamente proporcionales	0	0,0
	b) Ejemplifica magnitudes directamente proporcionales	5	38,5
	c) Elabora tabla de magnitudes directamente proporcionales	7	53,8
	d) Elabora gráfico de magnitudes directamente proporcionales	1	7,7

Respecto al ítem 1, que consiste en un problema de valor faltante que involucra magnitudes intensivas proporcionales, en la Tabla 2 se presentan los tipos de respuestas dadas por los sujetos. Éstos han sido identificados de acuerdo con el tipo de procedimiento empleado por el sujeto para resolver el problema. Las categorías empleadas en la valoración de las respuestas fueron descritas en el Cuadro 1.

Se observa que la regla de tres es el procedimiento de resolución predominante, utilizado por nueve sujetos (69,2%). Tres sujetos (23,1%) utilizan una relación de proporción para resolver el problema, mientras sólo un sujeto (7,7%) utiliza un procedimiento de índole aditiva de tipo aritmético. Se debe señalar que en el grupo de sujetos que emplean la regla de tres, sólo cuatro de ellos (30,8%) muestra un procedimiento que involucra la puesta en juego de un razonamiento de tipo algebraico, es decir, hace un uso apropiado de la regla de tres; donde la x es interpretada como incógnita del problema, mientras, los otros cinco (37,7%), no lo hacen, aun cuando llegan a un resultado correcto del problema.

Por otra parte, los tres sujetos (23,1%) que utilizan una relación de proporción para resolver el problema, hacen uso de un razonamiento de tipo algebraico en el proceso de resolución.

EDUCERE - Investigación Arbitrada - ISSN: 1316-4910 - Año 23 - Nº 76 - Septiembre - Diciembre 2019 / 761 - 777

Tabla 2. Tipos de respuestas dadas por los sujetos al ítem1 (N = 13)

Tipo de respuesta/resolución	Categorías	Frecuencias	
		Nº	**%**
Regla de tres	Informal/Incompleta	5	38,5
	Algebraica	4	30,8
	Subtotal	**9**	**69,2**
Relación de proporción	Algebraica	3	23,1
Estrategia aditiva	Aritmética	1	7,7
	Total	**13**	**100,0**

Se considera que la puesta en juego de un razonamiento de tipo algebraico (independientemente de la estrategia de resolución utilizada) es el más adecuado entre los mostrados por los sujetos, puesto que los demás procedimientos se refieren a usos poco adecuados o incompletos de los procedimientos de resolución. El hecho de que el uso de una relación de proporción ha implicado la puesta en juego de un razonamiento algebraico, parece indicar que tal uso está asociado al desarrollo del razonamiento algebraico, lo cual no sucede con la regla de tres.

En relación con el ítem 2, situando la atención en las características de la representación gráfica de una relación proporcional, referidas en el Cuadro 2, se observa en la Tabla 3 que los 13 sujetos (100%) representan los puntos, que expresan magnitudes proporcionales, orientados en línea recta. No ocurre lo mismo con las otras dos características. Sólo seis sujetos (46,2%) realizan una representación gráfica que pasa por el origen, de acuerdo con el criterio enunciado en el Cuadro 2. Esto se interpreta como el reconocimiento de que el origen es un punto que pertenece a la gráfica de una relación de proporcionalidad. Asimismo, sólo seis sujetos (46,2%) hacen uso adecuado de una escala para representar tal relación.

En lo relativo al ítem 3, en la Tabla 4 se presenta un resumen de las respuestas dadas por los sujetos. Se observa que las magnitudes proporcionales "lado del cuadrado y su perímetro" son reconocidas por los 13 sujetos (100%) como tales. De los 13 sujetos, 11 (84,6%) proveen de alguna justificación del porqué consideran que esas magnitudes son proporcionales. No obstante, la mayoría de las justificaciones dadas son deficientes, puesto que se refieren a argumentaciones que poco se corresponden con una caracterización precisa de la noción de proporcionalidad, como la presentada en el Cuadro 3.

Tabla 3. Características de la representación gráfica de una relación proporcional puestas de manifiesto en las respuestas de los sujetos (N = 13)

Características	Frecuencias	
	Nº	**%**
Orientación lineal de los puntos	13	100,0
Reconocimiento del origen como punto que pertenece a la gráfica	6	46,2
Uso adecuado de la escala	6	46,2

Una de las argumentaciones más comunes es el uso de una regla intuitiva del tipo "más en A, más en B" (Stavy, Babai, Tsamir, Tirosh, Lin & Mcrobbie, 2006), que se refiere a un aspecto de covariación, particular, no determinante de la relación de proporcionalidad directa. El uso de este tipo de regla fue exhibido por cuatro de los sujetos (30,8%). Otra de las justificaciones comunes consistió en aludir a la definición de perímetro: "es la suma de los lados"; tres sujetos (23,1%) hacen uso de ella. Sólo uno de los sujetos (S12) expone: "$p = 4x$, lado $= x$ entonces el perímetro siempre está en proporción directa respecto al lado del cuadrado" (véase Figura

2) lo cual puede ser interpretado como una buena aproximación al reconocimiento de la relación de proporcionalidad, de acuerdo con lo expuesto en el Cuadro 3. Las demás argumentaciones son de tipo “circular”; 3 sujetos (12,1%) presentan argumentaciones de ese tipo.

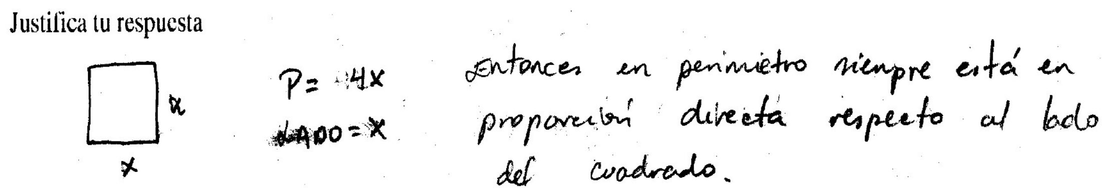


Fig. 2. Respuesta dada por S12 para justificar que el lado del cuadrado y su perímetro son magnitudes proporcionales.

Con relación a las respuestas dadas por los sujetos a los otros dos pares de magnitudes no proporcionales (lado del cuadrado y su superficie; edad y altura de las personas), se debe decir que buena parte de los sujetos (11; 84,6%) consideran, de manera acertada, que las mismas no son proporcionales. Las argumentaciones dadas por los sujetos que consideran a estas magnitudes proporcionales (2; 15,4%), están basadas en reglas intuitivas del tipo: “más en A, más en B”. Ciertamente, las magnitudes referidas, obedecen a esta regla, pero al no ser proporcionales (por lo expuesto en el Cuadro 3) se revela la poca pertinencia del uso de este tipo de regla para argumentar en torno a la noción de proporcionalidad.

Tabla 4. Reconocimiento y justificación de magnitudes proporcionales puestos de manifiesto en las respuestas de los sujetos (N = 13)

Magnitudes	**Categorías**	**Frecuencias**	
		Nº	**%**
a) Lado del cuadrado y su superficie	Reconoce como proporcional	2	15,4
	Justifica	**2**	**15,4**
b) Lado del cuadrado y su perímetro	Reconoce como proporcional	13	100,0
	Justifica	**11**	**84,6**
c) Edad y altura de las personas	Reconoce como proporcional	2	15,4
	Justifica	2	15,4

Respecto al ítem 4, se observa en la Tabla 1 (antes presentada) que ninguno de los sujetos da una definición satisfactoria de magnitudes proporcionales. No obstante, en función de las categorías identificadas (referidas en el Cuadro 4), se presentan en la Tabla 5, las frecuencias de los tipos de explicación dados por los sujetos al tratar de definir magnitudes proporcionales. El mayor número de explicaciones dadas se encuentran en la categoría *intuitivo*. En concreto, cinco sujetos (38,5%), al tratar de definir magnitudes proporcionales, presentan descripciones muy generales (relación, dependencia, semejanza, …, indicadas por la lógica), las cuales son satisfechas por este tipo de magnitudes. Próximos a este tipo de descripciones, tres sujetos (23,1%) muestran una explicación circular, es decir, tratan de definir magnitudes proporcionales haciendo uso de los términos “proporción” o “proporcionalidad” (véase Figura 3). Dos sujetos (15,4%) hacen uso de una regla intuitiva-cualitativa de covariación del tipo “más en A, más en B” para definir magnitudes proporcionales. Mientras tres sujetos (23,1%) no muestran ningún tipo de explicación.

EDUCERE - **Investigación Arbitrada** - ISSN: 1316-4910 - Año 23 - Nº 76 - Septiembre - Diciembre 2019 / 761 - 777

Tabla 5. Tipos de explicaciones dadas por los sujetos al tratar de definir magnitudes proporcionales (N = 13)

Tipo de explicación	Categorías	Frecuencias	
		Nº	%
Parcial	Uso de regla intuitiva-cualitativa o de covariación	2	15,4
	Intuitivo	5	38,5
	Circular	3	23,1
Completa	Relación constante entre razones	0	0,0
	No define	**3**	**23,1**
	Total	**13**	**100,0**

Es preciso observar las respuestas dadas por el sujeto S12 al justificar cuándo dos magnitudes son directamente proporcionales (Figura 2) y al definir magnitudes directamente proporcionales (Figura 3). Aun cuando parece utilizar el modelo lineal $y = kx$ como descriptor de la relación de proporcionalidad, para justificar que el lado del cuadrado y su perímetro son magnitudes directamente proporcionales, provee de una definición de magnitudes directamente proporcionales del tipo "circular".

En lo relativo a las ejemplificaciones dadas por los sujetos, como se mostró en la Tabla 1, sólo 5 sujetos (38,5%) muestran ejemplos correctos de magnitudes proporcionales. Estos ejemplos se refieren a equivalencias entre magnitudes de longitud (cm, m, km) o la presentación de una tabla de magnitudes proporcionales.

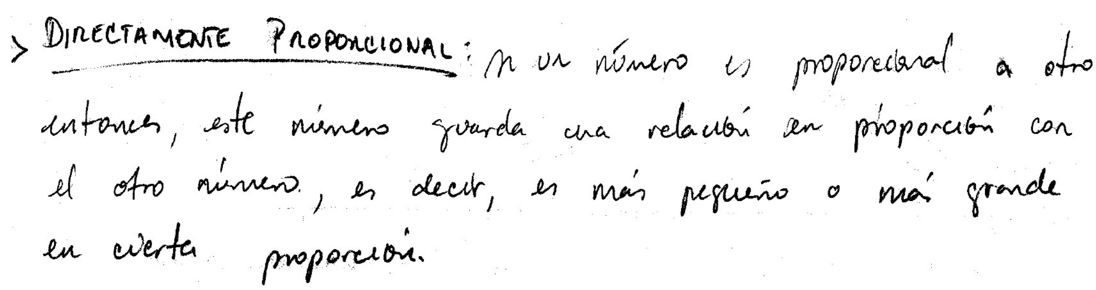

> DIRECTAMENTE PROPORCIONAL: si un número es proporcional a otro entonces, este número guarda una relación en proporción con el otro número, es decir, es más pequeño o más grande en cierta proporción.

Fig. 3. Respuesta dada por S12 para definir magnitudes directamente proporcionales

En la Tabla 6 se muestran las frecuencias de las categorías con que han sido valoradas las respuestas dadas por los estudiantes. Respecto a la categoría *ejemplifica incorrectamente* (tres sujetos, 23,0%), se debe a que utilizan magnitudes no proporcionales: "miembros de la familia y consumo de alimentos", "talla y edad", "peso y edad". Mientras, cinco sujetos (38,5%) no proveen de ningún tipo de justificación.

Los resultados en relación con la elaboración de una tabla de cantidades de magnitudes proporcionales, presentados en la Tabla 7, revelan que una mayoría simple de participantes (7; 53,8%) elabora una tabla de magnitudes proporcionales de manera correcta. Todas las tablas presentadas se reducen a dos tipos: (a) uso de relaciones de longitud (cm, m, km), y (b) múltiplos de un número (2, 5, 8 y 100). Casi el mismo número de participantes (6; 46,2%) no elabora una tabla de magnitudes proporcionales o la elabora de manera incorrecta. Las elaboraciones incorrectas están caracterizadas por referir a situaciones cuyas magnitudes no son proporcionales (talla/edad, peso/altura).

Tabla 6. Valoración de las ejemplificaciones dadas por los futuros profesores (N = 13)

Categorías	Frecuencias	
	Nº	%
Ejemplifica correctamente	5	38,5
Ejemplifica incorrectamente	3	23,0
No ejemplifica	5	38,5
Total	**13**	**100,0**

Para la valoración de la representación gráfica de magnitudes directamente proporcionales, se ha tomado en cuenta si las respuestas dadas por los sujetos cumplen con las características expuestas en el Cuadro 2. En la Tabla 8 se muestran las valoraciones correspondientes.

Tabla 7. Valoración de la elaboración de tablas de magnitudes proporcionales realizadas por los futuros profesores (N = 13)

Categorías	Frecuencias	
	Nº	%
Elabora tabla correctamente	7	53,8
Elabora tabla incorrectamente	2	15,4
No elabora tabla	4	30,8
Total	**13**	**100,0**

Se observa en la Tabla 8 que sólo un sujeto (7,7%) elabora una representación gráfica de magnitudes directamente proporcionales de manera correcta. Se debe reconocer que siete de los sujetos (53,8%) que elaboran una representación gráfica incorrecta, cinco de ellos (38,5%), han utilizado magnitudes proporcionales en su representación (relaciones de longitud, múltiplos de un número). Su representación es incorrecta porque al menos no se asume que el origen de coordenadas necesariamente pertenece a la representación realizada. Los otros dos sujetos (15,4%), de estos siete, hacen uso de magnitudes no proporcionales en sus representaciones. Es notorio que cinco sujetos (38,5%) no elaboran ninguna representación gráfica.

Discusión de resultados

De acuerdo con los resultados mostrados en la Tabla 1 se puede deducir que los futuros profesores de matemática logran resolver problemas de valor faltante que involucran una relación de proporcionalidad directa entre magnitudes intensivas, de manera correcta, al igual que realizar la representación gráfica de magnitudes proporcionales dadas en una tabla. Asimismo, han mostrado un buen desempeño al distinguir entre magnitudes proporcionales y no proporcionales en una lista de pares de magnitudes dadas. No obstante, los futuros profesores han mostrado dificultad para: (a) argumentar en torno a por qué dos magnitudes dadas son proporcionales, (b) enunciar una definición de magnitudes proporcionales, y (c) elaborar una representación gráfica de magnitudes proporcionales cuando los valores de esas magnitudes no le son dados en una tabla.

Tabla 8. Valoración de representación gráfica de magnitudes proporcionales realizadas por los futuros profesores (N = 13)

Categorías	Frecuencias	
	Nº	%
Elabora representación gráfica correctamente	1	7,7
Elabora representación gráfica incorrectamente	7	53,8
No elabora representación gráfica	5	38,5
Total	**13**	**100,0**

EDUCERE - Investigación Arbitrada - ISSN: 1316-4910 - Año 23 - Nº 76 - Septiembre - Diciembre 2019 / 761 - 777

En relación con lo referido en el objetivo específico **OE1**, una valoración general de las respuestas dadas por los futuros profesores a los problemas de proporcionalidad propuestos en la prueba diagnóstico, conduce a reconocer cierta deficiencia en el uso apropiado de la noción de proporcionalidad, a la falta de un manejo de una caracterización de magnitudes proporcionales y su uso para resolver problemas de proporcionalidad de manera pertinente. Este resultado coincide con los señalados en otras investigaciones (Ben-Chaim, Keret & Ilany, 2012; Buforn & Fernández, 2014; Livy & Herbert, 2013; Rivas, Godino & Castro, 2012), que se refieren a un desempeño deficiente de futuros profesores al resolver situaciones problema referidas a la proporcionalidad y el uso de los diversos significados de esa noción.

De acuerdo con los resultados mostrados en las Tablas 2 a la 8, con relación a lo formulado en el objetivo específico **OE2**, los procedimientos empleados por los futuros profesores, al resolver situaciones-problema sobre proporcionalidad, se encuentran asociados al uso de reglas, cuya aplicación parece corresponder a un aprendizaje mecánico-memorístico, con significados limitados, particulares, basados en la intuición o aspectos parciales satisfechos por una relación de proporcionalidad (relación, dependencia, semejanza, covariación,…). Estos resultados coinciden con los enunciados en investigaciones precedentes (Ben-Chaim, Keret & Ilany, 2012; Lamon, 2007; Monteiro, 2003, Rivas, 2013), quienes refieren al uso de aspectos (significados) parciales al resolver situaciones problemas proporcionales.

En relación con lo referido en el objetivo **OE3**, tal y como se observó en los resultados expuestos, las principales deficiencias observadas en las respuestas dadas por los futuros profesores a los ítems considerados, están referidas a: (a) ausencia de argumentaciones que le permitan justificar de manera apropiada por qué dos magnitudes dadas son proporcionales, (b) enunciar una definición de magnitudes proporcionales por medio del uso de aspectos característicos de esa relación, por ejemplo: *relación de covariación constante entre las cantidades de magnitudes*, y (c) tomar en cuenta aspectos característicos de la representación gráfica de una relación de proporcionalidad, cuya linealidad exige que el origen del sistema de coordenadas elegido pertenezca a la gráfica de la relación representada.

Otros aspectos en los que se evidenció deficiencias, aunque con frecuencias medias, fueron los referidos a mostrar ejemplos de magnitudes proporcionales y elaborar tablas sobre esas magnitudes. Algunas de estas deficiencias han sido mostradas por futuros profesores en otros estudios (Izsák, & Jacobson, 2017; Lee & Yim, 2014; Lim, 2009).

En lo relativo a la determinación de conflictos potenciales en el proceso de adquisición de la noción de proporcionalidad por futuros profesores, al que se refiere el objetivo específico **OE4** de esta investigación, los resultados observados conducen a reconocer los siguientes:

1. El uso correcto de algoritmos como la regla de tres o de reglas del tipo intuitivo de covarición no constante: "más en A, más en B", no puede ser considerado suficiente para garantizar la adquisición del conocimiento en torno a la proporcionalidad.
2. La correcta representación gráfica de una tabla de pares de valores de magnitudes proporcionales (puntos orientados linealmente) no da garantía de que el sujeto haga uso de aspectos específicos de esa representación, por ejemplo, el hecho de que el origen del sistema de coordenadas pertenece a la gráfica de dicha representación.
3. Es necesario un uso adecuado de la escala para elaborar una representación gráfica cuya orientación lineal de los puntos pasa por el origen. No obstante, tal hecho, no garantiza que el sujeto sea consciente de que la gráfica que elabora cumple con esa condición de la linealidad de la representación de una relación de proporcionalidad.
4. El solo reconocimiento de que dos magnitudes (p, l) son proporcionales porque cumplen con una relación del tipo $p = 4l$, no es suficiente para dar lugar a una concepción completa-integral o global de la noción de proporcionalidad. Esto fue mostrado por uno de los participantes (S12).

En relación con lo referido en el objetivo general **OG**, el diagnóstico realizado ha mostrado que el futuro profesor de matemáticas sólo hace uso de elementos parciales relativos a la noción de proporcionalidad, quedando prácticamente sin efecto el uso de aspectos que caracterizan plenamente dicha noción.

Conclusiones

El instrumento aplicado para realizar el diagnóstico en torno al conocimiento de la proporcionalidad, a una muestra de futuros profesores de matemáticas, cuyos ítems se refieren a diversas situaciones-problemas que involucran dicha noción, ha permitido observar algunas deficiencias en el desempeño de los futuros profesores. Además, el análisis cognitivo de las respuestas dadas por la muestra ha permitido observar que el conocimiento sobre la proporcionalidad exhibido por los futuros profesores se presenta incompleto, caracterizado en buena medida por el conocimiento de aspectos parciales (disposición lineal de los puntos en un gráfico cartesiano, la covariación, el uso de reglas intuitivas-cualitativas, la elaboración de tablas de magnitudes proporcionales, uso de relaciones numéricas particulares) relativos a la noción de proporcionalidad. El uso de estos aspectos parciales sólo permite aproximaciones limitadas a esa noción. Es por ello necesario el desarrollo de procesos de instrucción de futuros profesores, dirigidos a la consolidación de una caracterización de la idea de proporcionalidad, que integre los significados parciales en un *significado global* (Godino et al., 2017) de esa noción matemática.

Se acepta que una razón es una comparación multiplicativa entre cantidades de una misma magnitud o entre cantidades de magnitudes diferentes, que la proporción es una igualdad de dos razones y la proporcionalidad de magnitudes es una relación de covariación constante entre cantidades de dichas magnitudes. La función lineal $y = kx$ constituye pues el modelo que sintetiza diversos lenguajes, situaciones y representaciones de la relación de proporcionalidad directa. Contrario al supuesto de que conocer este significado, en el que se sintetiza la relación de proporcionalidad directa, sería suficiente para dar garantía de un manejo apropiado de dicho concepto, en este estudio se comprueba que el uso de ese significado no garantiza el manejo de un significado global de esa noción, puesto que uno de los sujetos (S12), aun cuando hizo uso de una caracterización de tipo funcional para justificar que las magnitudes lados de un cuadrado y su perímetro son proporcionales (presentado antes en la Figura 2), no logró mostrar, en su momento, una definición pertinente de magnitudes directamente proporcionales (presentado antes en la Figura 3).

En relación con lo expuesto, la valoración del conocimiento sobre la proporcionalidad de futuros profesores, no debería limitarse a cómo resuelven algún tipo de problemas proporcionales, como por ejemplo los de valor faltante, a la representación gráfica de valores de magnitudes proporcionales dados en una tabla, o el uso de alguno de los significados caracterizadores de la noción de proporcionalidad referidos anteriormente, puesto que la sola valoración de estos aspectos parciales provee de una aproximación limitada a lo que es el conocimiento proporcional requerido para la enseñanza y desarrollo de este contenido matemático.

Ciertamente, aun cuando se muestre solvencia en este tipo de acciones, como las reveladas por algunos de los futuros profesores participantes, con ellas pueden convivir deficiencias sobre el conocimiento de la proporcionalidad como las expuestas anteriormente. Asimismo, la noción de proporcionalidad se presenta como algo complejo, dado que involucra no sólo los aspectos descritos en el marco teórico y los identificados en los análisis epistémicos/cognitivos previos, los cuales han servido para realizar buena parte de las valoraciones y descripciones de las actuaciones de los futuros profesores, sino también involucra la necesidad de una comprensión integral, holística o global, cuya caracterización escapa a lo observado en esta investigación. En tal sentido, se recomienda poner atención a estos resultados y fomentar la enseñanza de la proporcionalidad desde una perspectiva holística encaminada a garantizar el desarrollo de una "construcción integral" o "global" de la noción de proporcionalidad.

Finalmente, se debe reconocer que lo mostrado en los resultados de este diagnóstico sigue siendo limitado en relación con los elementos que deben ser tomados en cuenta en la enseñanza y desarrollo de este contenido. Aspectos relacionados con el uso de escalas, semejanzas de figuras geométricas, entre otros, que no han sido

EDUCERE - Investigación Arbitrada - ISSN: 1316-4910 - Año 23 - Nº 76 - Septiembre - Diciembre 2019 / 761 - 777

considerados en la elaboración de este diagnóstico, pueden contribuir a la identificación de otros elementos involucrados en la adquisición de la noción de proporcionalidad.

Este artículo es una versión ampliada de la comunicación: Rivas, Rondón y Triviño (2017), publicada en Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual del Enfoque Ontosemiótico. Disponible en: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html. Se ha incluido parte de la información ya publicada, con el fin de mostrar información relevante y completa sobre los resultados de la investigación realizada.

Reconocimiento: El proyecto en el que se inscribe este artículo de investigación ha sido financiado por el CDCHTA-ULA, bajo el código: H-1448-13-04-A.

Mauro Rivas Olivo. Profesor de la Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela. Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, España. Área de Investigación: Educación Matemática. Línea: Formación de profesores.

Yazmary Rondón. Profesora de la Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela. Magister en Educación Mención Informática y Diseño Instruccional por la Universidad de Los Andes. Área de Investigación: Educación Matemática, Uso de las TIC en educación. Línea: Formación de profesores.

María Burgos. Profesora de la Universidad de Granada, España. Doctora en Matemáticas por la Universidad de Almería y Magister en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada. Área de Investigación actual: Didáctica de la Matemática y formación de profesores. Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Campus Universitario de Cartuja, 18071 Granada.

Referencias bibliográficas

Ben-Chaim, David, Keret, Yaffa & Ilany, Bat-Sheva. (2012). *Ratio and proportion. Research and teaching in mathematics teachers' education*. Rotterdam: Sense Publishers.

Buforn, Ángela & Fernández, Cenaida. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28*(48), 21-41.

Cohen, Louis, Manion, Lawrance & Morrison, Keith. (2011). *Research methods in education*. 7th ed. London: Routledge.

Fernández Lajusticia, Alejandro. (2009). *Razón y proporción. Un estudio en la escuela primaria*. Valencia-España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València.

Fernández, Cenaida. & Llinares, Salvador. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje, 34*(1), 67-80.

Freudenthal, Hans. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Reidel Publishing, Dordrecht.

Godino, Juan, Batanero, Carmen. & Font, Vincent. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, Juan, Beltrán-Pellicer, Pablo, Burgos, María. & Giacomone, Belén (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Izsák, Andrew & Jacobson, Erik. (2017). Preservice teachers' reasoning about the relationships that are and are not proportional: A knowledge-in-pieces account. *Journal for Research in Mathematics Education, 48*(3), 300-339.

Jitendra, Asha K., Star, Jon R., Dupuis, Danielle Nicole, & Rodriguez, Michael C. (2013). Effectiveness of schema-based instruction for improving seventh-grade students' proportional reasoning: A randomized experiment. *Journal of Research on Educational Effectiveness*, *6*(2), 114-136.

Kenney, Patricia Ann, Lindquist, Mary M. & Heffernan, Cristina L. (2002). Butterflies and caterpillars: Multiplicative and proportional reasoning in the early grades. En Bonnie Litwiller & George Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 87-99). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Koellner-Clark, Karen & Lesh, Richard. (2003) Whodunit? Exploring proportional reasoning through the footprint problem. *School Science and Mathematics, 103*(2), 92-98.

Lamon, Susan J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En Frank K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lee, Hyung Sook & Yim, Jaehoon. (2014). Pursuing coherence among proportionality, linearity, and similarity: Two pathways from preservice teachers' geometric representations. *The Mathematics Enthusiast, 11*(3), 541-554. Disponible en: http://scholarworks.umt.edu/tme/vol11/iss3/7

Lesh, Richard, Post, Thomas, & Behr, Merlyn. (1988). Proportional reasoning. En James Hiebert & Merlyn Behr (Eds.). *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lim, Kien H. (2009). Burning the candle at just one end: Using nonproportional examples helps students determine when proportional strategies apply. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(8), 492–500.

Livy, Sharyn & Herbert, Sandra. (2013). Second-year pre-service teachers' responses to proportional reasoning test items. *Australian Journal of Teacher Education, 38*(11), 17-32. Recuperado de: http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2013v38n11.7

Monteiro, Cecilia. (2003). Prospective elementary teachers' misunderstanding in solving ratio and proportion problems. En N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp 317–323). Honolulu, HI: PME.

Rivas, Mauro (2013). *Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de educación primaria*. (Tesis doctoral. Universidad de Granada, España. Director de tesis: Juan D. Godino). Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Mauro_Rivas_tesis.pdf.

Rivas, Mauro, Godino, Juan & Castro, Walter (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 26*(42B), 559-588.

Rivas, Mauro, Rondón, Yazmary & Triviño, Luz. (2017). Conocimiento de futuros profesores de matemática sobre proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontose-*

miótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Disponible en: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Small, Marian. (2015). *Building proportional reasoning across grades and math strands, K-8*. Columbia University: Teachers College Press.

Smith, John. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. En Bonnie Litwiller & George Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 87-99). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Stavy, Ruth, Babai, Reuven, Tsamir, Pessia, Tirosh, Dina, Lin, Fou-Lai & McRobbie, Campbell. (2006). Are intuitive rules universal? *International Journal of Science and Mathematics Education 4*, 417-436.

Tjoe, Harnoto & de la Torre, Jimmy. (2014). On recognizing proportionality: Does the ability to solve missing value proportional problems presuppose the conception of proportional reasoning? *The Journal of Mathematical Behavior, 33*, 1-7. Disponible en: http://www.personal.psu.edu/users/h/h/hht1/Tjoe2014_JMB.pdf.

Tourniaire, Francoise, & Pulos, Steven. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(2), 181-204.

Van Dooren, Wim, De Bock, Dirk & Verschaffel, Lieven. (2010). From addition to multiplication …and back: The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction, 28*(3), 360-381.

Vergnaud, Gerard. (1988). Multiplicative structures. En James Hiebert & Merlyn Behr (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 141-161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

ANEXO

MATEMÁTICA
PRUEBA SOBRE PROPORCIONALIDAD

NOMBRE: ____

1. Un auto consume 8,4 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

2. ¿Cuáles de las siguientes tablas expresan magnitudes proporcionales? (Los números expresan las medidas de las cantidades correspondientes).

A	1	2	3	4	5
B	7	14	21	28	35

L	4	8	12	16	20
S	36	72	108	144	180

T	1	2	3	4	5
E	100	200	300	400	500

Comprueba tus respuestas, representando gráficamente cada tabla en diagramas cartesianos.

3 De los siguientes pares de magnitudes, ¿cuáles son directamente proporcionales?
a. Lado del cuadrado y su superficie
b. Lado del cuadrado y su perímetro
c. Edad y altura de las personas
Justifica tu respuesta usando una tabla para cada uno

____
____
____

4. Define con tus propias palabras cuándo dos magnitudes son directamente proporcionales. Pon un ejemplo, construye una tabla de valores posibles y represéntala gráficamente.

____
____
____

EDUCERE - Investigación Arbitrada - ISSN: 1316-4910 - Año 23 - Nº 76 - Septiembre - Diciembre 2019 / 761 - 777