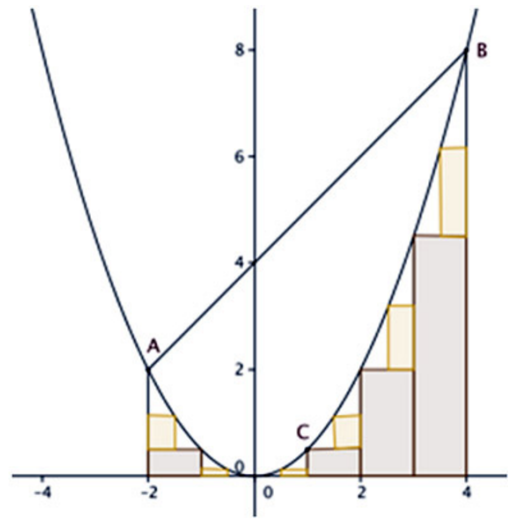
Propuesta de representación simbólica de operaciones con infinitesimales

Symbolic representation proposal of operations with infinitesimals



Alfredo Jiménez Colín
https://orcid.org/0000-0001-6217-7926
alfredojicol@gmail.com
Teléfono de contacto: +52 722 169 4025
Universidad Autónoma de México
Toluca, Estado de México
México

Fecha de recepción: 13/05/2021
Fecha de envío al árbitr16/05/2021
Fecha de aprobación: 03/06/2021

Resumen

Con una visión somera de los números hiperreales, este trabajo ofrece una explicación capaz de adherirse en los planes de estudio de las ingenierías, para subsanar los huecos de conocimiento que pudieran ocasionar que los estudiantes rechacen la validez del cálculo infinitesimal debido a no encontrar en él, el rigor matemático que han venido estudiando en grados anteriores; asimismo se presenta una propuesta para representar las operaciones que involucran la manipulación de números reales e infinitesimales en la suma o sustracción de estos, con el objetivo de mejorar la comprensión del cálculo infinitesimal en los estudiantes, evitando de esta forma que el alumno vuelva a identificar las mismas inconsistencias detectadas por filósofos anteriores a la invención del análisis no estándar.

Palabras clave: Cálculo infinitesimal, números hiperreales, cálculo integral, exactitud, precisión

Abstrac

With a superficial point of view of hyperreal numbers, this paper provides an explanation that might be able to incorporate in study plans of engineers to fill holes of knowledge that students could have studying infinitesimal calculus, rejecting on this way validity of infinitesimal calculus at not find the mathematical rigor that they could found in previous math courses. In addition to that, this paper also put forward a representation of operations with infinitesimals like the sum or subtraction with real and infinitesimal numbers with the aim of generate a better comprehension in students, avoiding in the future that student need to detect again the same inconsistency detected by philosophers time before of the invention of the non-standard analysis.

Keywords: Infinitesimal Calculus, hyperreal numbers, integral calculus, accuracy, precision

Author´s translation.

Introducción

El cálculo infinitesimal ha tenido a lo largo de su historia, severas críticas sobre el avistamiento de una "inaceptable falla lógica-matemática" que en este siglo sigue causando polémica y tema de discusión, (Ely, 2010, pp. 117-146).

El cálculo de Sir. Isaac Newton y Leibniz, no fue bien recibido por sus colegas contemporáneos. Esto debido a que esta nueva herramienta matemática no contaba con la rigurosidad que las matemáticas exigen para poder generar una cálida acogida en la comunidad intelectual de matemáticos. Aunque el cálculo se miraba con cierto rechazo, no dejó de utilizarse debido a la utilidad de esta herramienta para poder estudiar ciertos fenómenos presentes en nuestro universo (Buffa F., 1985). Así es que se utilizaba aun cuando había cierta oscuridad en su entendimiento. Y aunque el cálculo infinitesimal con enfoque de Leibniz ha tenido a bien sufrir variaciones en sus procedimientos e interpretaciones, no subsanó su oscuridad en cuanto a entendimiento se refiere, sino hasta la llegada del "Análisis no Estándar" de Abraham Robinson (Gonzáles George, 2003, pp. 33-34). Sin embargo, en algunos planes de estudio de Educación Superior (especialmente en ingenierías), se sigue enseñando un cálculo infinitesimal con enfoque de Leibniz hasta antes de la llegada del análisis no estándar, reviviendo en la comunidad estudiantil dicha oscuridad que padeció la comunidad intelectual de matemáticos respecto al entendimiento de dicha herramienta hasta la llegada del análisis no estándar.

El análisis no estándar, no se enseña en los planes de estudio de las ingenierías porque se argumenta que la comunidad estudiantil no tiene la formación académica para comprenderlo debido a su alto contenido de abstracción (Gonzáles George, 2003, p. 35). Empero, Karin y Mikhail revelan que no es complicado que el estudiante comprenda el concepto de números hiperreales (Usadi Katz & G. Katz, 2010, p. 19), razón por la cual podría incorporarse el concepto de números hiperreales en los planes de estudio de la materia de Cálculo en las Facultades de Ingeniería.

En este documento se exponen algunas de las observaciones hechas por filósofos anteriores a la invención del análisis no estándar, donde ponen de manifiesto una de las inconsistencias detectadas en el cálculo infinitesimal al tratar la igualdad que resulta de sumar números reales con infinitesimales. Con el objetivo de ayudar a subsanar este conflicto que sigue presentándose en las aulas, el presente documento brinda una explicación y propuesta capaz de incorporarse en los planes de estudio de las ingenierías para lograr una mejor comprensión de la interacción entre números reales e hiperreales en los estudiantes de ingeniería sin tener la necesidad de profundizar en el estudio del análisis no estándar como suele hacerse en las licenciaturas de matemáticas puras.

Breve historia acerca de la polémica del Cálculo infinitesimal

Desde que Leibniz formuló el cálculo infinitesimal, se percató de una inconsistencia que posteriormente sería severamente señalada por filósofos como Berkeley (Berkeley, 2002, pp. 1-28), Karl Marx (J. Durán, 2018) y Friedrich Engels (Engels, 1894, p. 77). Leibniz expone que: $f+i\approx f$, donde "f" es un número finito e "i" es un infinitesimal (Ely, 2010, p. 121). Sin siquiera existir el "análisis no estándar", Leibniz tenía conciencia de que un número finito más un infinitesimal no era igual a ese mismo número finito, esto es: $f+i\neq f$ o bien $f+i\approx f$.

George Berkeley critica a los matemáticos que están en contra de la fe y que aceptan los postulados de las matemáticas por fe, sin exigir en ellos ese rigor que exigen en las cuestiones de la fe. (Berkeley, 2002, pp. 1-28)

Involucrando números infinitamente grandes, Karl Marx trata de justificar el materialismo dialéctico con base a lo que él denomina "una falta de lógica fundamental en las matemáticas", refiriéndose a la escandalosa aseveración de la ecuación: A+1=A, donde "A" es un número infinitamente grande. J. Durán (2018) en cita textual describe el pensamiento de Karl Marx respecto a Sir Isaac Newton y Leibniz sobre esta falta de fundamentación lógica en las matemáticas: “Ellos mismos creían en el misterioso carácter del cálculo recién descubierto, que producía resultados ciertos por un procedimiento matemático positivamente falso”.

Respecto al cálculo infinitesimal, Friedrich Engels señala que la estructura irrefutable de las matemáticas había caído en desgracia y se había acabado para siempre, de tal forma que la mayoría de las personas que resolvían o hacían diferenciales o integrales no entendían el sentido ontológico de las mismas y que las resolvían por el puro sentido de la fe, dado que hasta la fecha siempre habían producido resultados correctos. (Engels, 1894, pp. 77-78)

Las críticas y resistencia por aceptar el cálculo infinitesimal se presentaron prácticamente desde sus inicios y continuaron con cierta constancia y severidad a lo largo de casi dos siglos ocasionando que a finales del siglo XIX, el cálculo basado en el concepto de límite fuera preferido sobre el cálculo infinitesimal, enseñándose en las aulas de clase desde ese entonces. (Gonzáles George, 2003, p. 2)

Actualmente, en algunas universidades se prefiere emplear el concepto de límite para explicar y desarrollar el sentido ontológico de la derivada tanto en el nivel medio superior (Núñez Salazar, Contreras Garduño, Gómez Tagle Fernández de Córdova, Rojas González, & Laredo Santín, 2007, pp. 1-296), como en algunas licenciaturas de matemáticas puras (Universidad Autónoma del Estado de México, 2003) (Universidad Nacional de México., 2005).

Por otro lado; sea ha visto que algunas licenciaturas de ingeniería prefieren usar el cálculo infinitesimal por sobre el cálculo basado en el concepto de límite, esto puede ser debido a que tal como lo señala Freudenthal, el enfoque del cálculo infinitesimal es usado porque se observa que es intuitivo para la modelación de problemas (Freudenthal, 1973, p. 148). Esto se puede observar en algunos programas de estudio de la materia de Cálculo de la Facultad de Ingeniería (Universidad Autónoma del Estado de México, 2009).

El cálculo infinitesimal está cobrando territorio por lo general en las aulas de licenciaturas de ingeniería. Empero, por experiencia propia el autor ha podido observar cierta resistencia de un determinado sector de la comunidad intelectual involucrada en el estudio del cálculo por reconocer la existencia y validez de las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes.

El problema persiste

La inconsistencia de falla lógica detectada por los matemáticos y filósofos en el cálculo sigue causando mella dentro de la comunidad intelectual que posee interés en el cálculo infinitesimal, (Ely, 2010, p. 138) ocasionando, como ya habíamos dicho, que un determinado sector de la comunidad intelectual interesada en el estudio del cálculo ponga en duda la validez del cálculo infinitesimal concebido antes de la llegada del análisis no estándar de Robinson, por no gozar con la coherencia lógica y estricta que caracteriza la pureza de las matemáticas como ciencia exacta. El problema radica en que no se enseña el análisis no estándar en las licenciaturas de ingeniería debido a su alto nivel de abstracción requerido para ser comprendido (Gonzáles George, 2003, p. 35), dejando al alumno desprovisto en luz de entendimiento, ocasionando que vuelva a identificar las mismas inconsistencias detectadas por los autores mencionados en el capítulo anterior.

Esto representa un reto para el docente; el cual tiene la responsabilidad de explicar a la comunidad estudiantil de manera convincente los postulados que sustentan al cálculo infinitesimal. Sin embargo, en muchas ocasiones, estas explicaciones resultan insuficientes e insatisfactorias para el estudiante que ha captado el rigor matemático en cursos anteriores.

Las dos hipótesis

Para poder ver más claramente el meollo del asunto que se tratará en este artículo, se plantean dos hipótesis que resumen el centro de la problemática de aceptación del cálculo infinitesimal que se abordará en este artículo.

1. La suma de un número real más un número infinitesimal es aproximadamente igual al número real.
2. La suma de un número real más un número infinitesimal es igual al mismo número real que suma al infinitesimal.

El argumento de la primera hipótesis equivale a afirmar que la igualdad x+dx=x, donde "x" es un número real y dx es una cantidad infinitesimal, es falsa, porque si le quitamos la cantidad infinitesimal, se pierde la exactitud de la suma y aunque el número infinitesimal es una cantidad tan infinitamente pequeña, el hecho de quitarle esa cantidad aunque sea infinitamente pequeña e ignorarla en el resultado de la suma, ocasiona la falsedad de la igualdad previa, ocasionando que la suma se deba representar con el símbolo de aproximación. Esto es:

$$2+\alpha\approx 2\rightarrow\{A\}$$

En un grupo social de personas interesadas en matemáticas y en apoyo de la segunda hipótesis se lee la siguiente analogía con cantidades finitas para explicar la igualdad entre la suma o sustracción de infinitos y reales:

"…Si a un gato, le quitas un pelo y solo uno. El gato permanece indistinguiblemente igual. Lo mismo pasa si le añadieras un pelo. Permanece igual. Pues un pelo de los millones que seguramente tiene, no le alteran y ante la vista permanece igual, aunque haya variado por una cantidad pequeña."

Este argumento se expresa matemáticamente de la siguiente forma:

Sea N el número total de pelos del gato, si le quitamos un pelo, se tiene:

$$N-1=N$$

En este ejemplo se considera al número real como un número infinitamente pequeño respecto al número N, es decir, que el número N, es un número infinitamente grande respecto al número real 1.

En esta operación, es como si de una manera informal y coloquial se estuviese diciendo que la resta N-1, sí cambia, pero que cambia muy poquito y que no vale la pena realizar el esfuerzo mental para saber el resultado exacto de N-1, porque el resultado sería muy parecido a N. Sin embargo, observe que, en esta sentencia informal, se hace una distinción implícita entre exactitud y aproximación. Y, además se está infiriendo que la resta N-1=N, en realidad no es exacta sino aproximada, por lo que siendo estrictos deberíamos de representarla de la siguiente forma:

$$N-1\approx N$$

Y se expresa de esta forma porque si no sabemos la cantidad total de pelos del gato, podríamos representar dicho total con la letra N.

La segunda hipótesis en términos de la ecuación A, se puede expresar como sigue:

$$2+\alpha=2$$

Exactitud y aproximación

En ciertas operaciones aritméticas cómo una simple suma, ejemplo: 3+6, arroja el resultado exacto de 9; entonces se puede decir que 3+6=9, y de esa forma se puede usar el símbolo de igualdad sin el temor de haber cometido error. En ciertas fracciones, como 1/2, que equivale a la cantidad decimal 0.5, también se puede usar el símbolo de igualdad; de esta forma, se puede decir que: ½=0.5.

Llevando el símbolo de igualdad al álgebra; se puede decir que: 8x-16=0; de esa forma, resolviendo para "x", se encuentra que x=2. Sustituyendo, se obtiene la igualdad, por lo que el símbolo de igualdad está correctamente empleado.

Pero en el caso de fracciones tales como 96/101, que se caracterizan por tener una serie de cifras que se repiten indefinidamente, y consecuentemente, es correcto usar el símbolo de igualdad siempre y cuando se ponga el símbolo de periodicidad, como se muestra a continuación:

$$96/101=\overline{0.9504}$$

El *vinculum* encima de los dígitos 9504 indica que los números decimales se repiten indefinidamente de una manera periódica. Algunos autores, sustituyen este *vinculum* por unos puntos suspensivos. Ejemplo:

$$1/3=0.333\ldots$$

Con estos puntos suspensivos se indica que el número se repite indefinidamente. Empero; existen números cuyas cifras decimales siempre serán diferentes y no cuentan con algún patrón de periodicidad, estos números son llamados irracionales; ejemplo de estos números son: el número Euler (e), el número pi (π), entre otros. Si se quiere manipular estos números con un cierto número de cifras, entonces siendo estrictos, se tendría que usar el símbolo "aproximadamente igual que" ya que no se puede representar la cantidad exacta que se asocie con el símbolo de igualdad.

Así, por ejemplo, si se quiere usar a , se escribiría que: $\pi\approx3.1416$ (π es aproximadamente igual a 3.1416 que son las primeras cuatro cifras del número irracional con redondeo en la cuarta cifra)

En cambio, si se usan los puntos suspensivos para indicar que el número sigue su extensión indefinidamente, sería correcto usar el símbolo de igualdad, de la siguiente manera: $\pi=3.1415\ldots$. Indicando de esta manera que el número se extiende indefinidamente con muchas cifras más.

Ahora bien, también es común encontrar números irracionales en las raíces, de esta forma se tiene la siguiente raíz $\sqrt{1.32649}\approx1.51733476$, por ende, es necesario usar el símbolo "aproximadamente igual que", siendo esta la situación, se puede decir que: $\sqrt{1.32649}\approx1.517$ y ahorrase las demás cifras decimales. Otro ejemplo, es: $\sqrt{7}\approx2.645751311$, para simplificar se puede decir que: $\sqrt{7}\approx2.6$. Empero se debe tener en cuenta que toda operación que se realice con números irracionales aproximados irá acompañada o marcada ya, por el símbolo aproximadamente igual que, ejemplo: $2*\sqrt{7}\approx5.2915$. Sin embargo, se puede representar mediante el símbolo de igualdad, siempre y cuando se incluyan puntos suspensivos, indicándole al lector que ese número tiene o está compuesto por un número indefinido de cifras que no siguen un patrón de periodicidad, ejemplo: $2*\sqrt{7}\approx5.2915\ldots$ (aquí se puede usar el símbolo de igualdad porque estamos indicando al lector que se está considerando todas las cifras decimales de dicho número irracional).

Una demostración reveladora

A continuación, se procederá a desarrollar una demostración que aún en nuestros días la afirmación que resulta de la siguiente demostración suele ser con frecuencia tema de debate y discusión entre las diferentes esferas intelectuales interesadas en el estudio de las matemáticas (Ely, 2010, pp. 132-138), (Sáenz de Cabezón, 2018) & (Usadi Katz & G. Katz, 2010, pp. 3-27).

La siguiente demostración; tiene por fin, evidenciar la existencia de los números infinitesimales y observar el tipo de convivencia que tienen estos números con los números reales. El objetivo será demostrar que 0.999… es igual a 1, en el conjunto numérico de los reales.

Considere la siguiente ecuación:

$$10x = 9\,.999 \Rightarrow \{1\}$$

Al sustituir x=0.999 en la ecuación 1, se tiene:

$$10(0.999) = 9\,.99 \neq 9.999 \Rightarrow \{2\}$$

Se observa que de un lado tenemos un número cuya parte entera es 9, y la parte decimal es 0.99. Si se considera que el resultado arroja un número decimal periódico formado de una cantidad infinita de nueves después

EDUCERE - Investigación Arbitrada - ISSN: 1316-4910 - Año 25 - Nº 82 - Septiembre - Diciembre 2021 / 825 - 839

del punto decimal, entonces no existiría ya, la necesidad de contar la cantidad de nueves después del punto decimal, por lo que el problema quedaría resuelto y podríamos irnos conformes con que 0.999… es igual a 1. Pero si somos más rigurosos, y argumentamos que un resultado solo arroja dos decimales y el objetivo es que arroje tres decimales, entonces el problema no está resuelto y necesitamos un planteamiento más elaborado.

Para que se cumpla la igualdad en la ecuación {2}, es decir para que en ambos lados de la igualdad se tenga la misma cantidad de nueves después del número decimal, se tendrá que sumar a un lado de la igualdad la cantidad $\frac{9}{1000}$.

Así:

$$10x = 9.999$$

Sustituyendo x=0.999

$$10(0.999) = 9.999$$

Efectuando la operación del lado izquierdo de la igualdad:

$$9.99 \neq 9.999$$

Para que se cumpla la igualdad, habrá que sumarle al lado izquierdo de la igualdad la cantidad: $\frac{9}{1000}$, así:

$$9.99 + \frac{9}{1000} = 9.999$$

Efectuando la operación:

$$9.999 = 9.999$$

La ecuación se cumple.

Y si se quiere llegar a la igualdad con un 9.99, el procedimiento sería exactamente el mismo.

Ejemplo: calcular la igualdad con 9.99.

La ecuación objetivo sería:

$$10x = 9.99$$

Si x=0.99

$$\Rightarrow 10(0.99) = 9.99$$

$$9.9 \neq 9.99 \Rightarrow \{3\}$$

Encontrando el valor para llegar a la igualdad:

Sea Δx, el valor necesario para llegar a la igualdad, sabiendo que este valor se suma de un lado de la igualdad se tiene:

$$10x + \Delta x = 9.99$$

Despejando Δx:

$$\Delta x = 9.99 - 10(0.99) = 9.99 - 9.9 = \frac{9}{100}$$

Esto quiere decir que, si se suma Δx en el lado izquierdo de la ecuación 3, se llegará a la igualdad.

$$\therefore 9.9 + \frac{9}{100} = 9.99$$

$$\Rightarrow 9.99 = 9.99$$

Como se puede observar, para que se dé la igualdad se debe sumar una cantidad "Δx" del lado izquierdo de la igualdad para poder obtener la misma cantidad de decimales que la cantidad de decimales del número real al que se quiere llegar la igualdad. Y se observa que entre más decimales tenga el número real de la derecha, más pequeño deberá ser "Δx".

Así, si se tuviera que llegar a la igualdad con 9.99999, Δx debería ser:

$$\Delta x = 9.99999 - 10(0.99999) = \frac{9}{100000}$$

De esta forma se observa que entre más números decimales se exijan, entonces, Δx será cada vez más pequeño.

Ahora se procederá a realizar la demostración:

De la ecuación $\Rightarrow \{1\}$, se resta x=0.999… en ambos lados de la igualdad.

$$10x = 9.999\ldots$$

$$10x - x = 9.999\ldots - x$$

$$10(0.999\ldots) - 0.999\ldots = 9.999\ldots - 0.999\ldots$$

Factorizando y efectuando la operación del miembro derecho de la igualdad:

$$(0.999\ldots)(10 - 1) = 9$$

$$(0.999\ldots)(9) = 9 \Rightarrow \{4\}$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación {4} entre 9:

$$\frac{(0.999\ldots)(9)}{9} = \frac{9}{9}$$

$$0.999\ldots = 1$$

De esta forma se concluye que 0.999…=1.

Descubriendo un número misterioso

Considere el número 0.9. Para obtener la unidad, es necesario sumarle 0.1. Esto es:

$$0.9+0.1=1$$

Y si se tiene el número 0.99, habrá que sumarle 0.01:

$$0.99+0.01=1$$

Y si se tuviera el número 0.999, habrá que sumarle 0.001 o bien: 1/1000 o $1/10^3$, esto es:

$$0.999+1/10^3=1$$

Y si fuera el número 0.99999, habría que sumar $1/10^5$, así:

$$0.99999+1/10^5=1$$

Nótese que 0.9, sin importar la cantidad de nueves que hay después del punto decimal, necesita la suma del número $1/10^n$ para llegar a la unidad, donde "n" es el número de nueves que hay después del punto decimal.

EDUCERE - Investigación Arbitrada - ISSN: 1316-4910 - Año 25 - Nº 82 - Septiembre - Diciembre 2021 / 825 - 839

Se denominará α al número $1/10^n$. Por lo tanto, se tendrá una ecuación de la forma:

$$0.999... + \alpha = 1 \;\Rightarrow \{5\}$$

Ahora bien, si se tiene el número 0.999… en donde el número de nueves se extiende hasta el infinito, su complemento deberá tener la forma: $1/10^N$, donde N será el número de nueves después del punto decimal, y si tal número es ∞, es decir una cantidad infinitamente grande de nueves, entonces, $\alpha=1/10^\infty$.

Es decir; α se convierte en un número inimaginablemente pequeño. Algunos dirían que es cero, otros dirían que eso es nada, pero por la discusión anterior, se puede afirmar que se trata de una cantidad extremadamente pequeña; que, por su nivel de abstracción, no se puede expresar de manera concreta como 1/10, razón por la cual los humanos no hemos podido comprenderlos con la profundidad que se comprenden las cantidades finitas concretas. Sin embargo; es un número que, aunque no podemos conocerlo a plenitud, sabemos que existe y que allí está.

Y, sin embargo; en la sección titulada "Una demostración reveladora." se pudo demostrar que 0.999…=1. Entonces… ¿Qué pasó con α? ¿En dónde está? ¿En dónde quedó? ¿Por qué se pudo realizar la demostración sin involucrarse con α?

Aquí es donde se enuncian las siguientes conclusiones preliminares al objetivo de este documento. En donde se responden a las preguntas formuladas anteriormente, poniendo de manifiesto la existencia de los números infinitesimales y su convivencia con los números reales:

1. Entre 0.999… y 1, sí existe algo y ese algo es un número infinitamente pequeño diferente del número cero. Ya que, como vimos anteriormente, se trata de un número positivo extremadamente pequeño, muy cercano al cero y que no se puede expresar como una cantidad finita concreta, razón por la cual conlleva a concluir que dicho número no existe en el conjunto numérico de los números reales.
2. Se justifica que el número existente entre 0.999… y 1 es diferente de cero dado que la condición para que un número sea cero es que su numerador sea igual al número cero. En este caso; el numerador es igual a un número real positivo diferente de cero $(\frac{1}{10^N})$. Condición suficiente para afirmar que dicho número es infinitamente pequeño positivo diferente de cero.
3. Los números infinitesimales no se encuentran en el conjunto numérico de los reales. Dado que no existe ningún número real diferente de cero capaz de cumplir la igualdad tratada en la ecuación {5}.

Karin y Mikhail ratifican la existencia de un número infinitamente pequeño entre 0.999… y 1, por lo que en el campo de los hiperreales se cumple la desigualdad: 0.999…<1. (Usadi Katz & G. Katz, 2010, p. 19)

Compare usted esta situación con los números complejos, en donde existe una suma o sustracción de dos números de distintos conjuntos numéricos con características y propiedades diferentes.

Sea z=a+bi, un número complejo, en donde $a \wedge b$ son números pertenecientes al conjunto numérico de los reales.

Si se quiere tomar solamente la parte real, se tendría que Re(z)=a, si se quiere tomar solamente la parte imaginaria, se tendría que: I.m(z)=a. Si se quiere tomar todo el número complejo, se tendría que: z=a+bi

Ahora se aplicará la misma lógica con la ecuación ⇒ {5}. Si se quiere solamente la parte real, se tendría que 0.999…=1, si se quiere tomar la parte real más la infinitesimal, entonces se tendría: 0.999…+α=1; pero observe que no se puede tomar solamente la parte infinitesimal y decir que la igualdad se cumple, es decir, no se puede hacer lo siguiente: α=1.

También observe que el hecho de que exista un infinitesimal y que no se considere en el campo de los reales no hace necesario utilizar el símbolo ≈ cuando se dice que: 0.999…=1.

Algunos expertos adoptan la postura de concluir que entre 0.999… y 1, no hay nada (Sáenz de Cabezón, 2018), por otro lado, algunos investigadores han encontrado que se han presentado casos de alumnos que adoptan la postura de concluir que entre 0.999… y 1, existe algo (Ely, 2010, p. 132).

Alguien podría decir que 0.999… necesita un complemento α para llegar a ser 1, y que si se le quita ese complemento α, entonces, se tendría que colocar el símbolo ≈, para decir que: 0.999…≈1 y que solo podría llevar el símbolo =, cuando se pueda expresar como en la ecuación $\Rightarrow \{5\}$, es decir: 0.999…+α=1 y que si se le quita el número α, entonces sería absolutamente necesario tener la siguiente notación: 0.999…≈1, porque entre 0.999… y 1 hay algo que lo estamos quitando y ya no lo estamos considerando.

A esta última objeción, existe la siguiente respuesta: se utiliza el símbolo de igualdad, para referirse que 0.999…=1, porque el número α, no existe en el conjunto numérico de los reales. Esto quiere decir que, hablando en el conjunto numérico de los reales, ciertamente se cumple que 0.999…=1. Si se quiere expandir la visión y ver más allá de los números reales, se tendría que aceptar la ecuación $\Rightarrow \{5\}$:

$$0.999\ldots+\alpha=1$$

Otro punto a favor, para utilizar el símbolo =, en lugar de ≈, cuando se dice que 0.999…=1, es que α y 0.999…, tienen características y propiedades distintas, si se operan estos dos números se comportan de formas distintas.

Por ejemplo; si se tiene el número infinitamente pequeño α y este número se eleva al cuadrado se tendría como resultado un número infinitamente pequeño respecto a α. ¿Por qué sucede esto?

Sea: $\alpha = \frac{1}{10^N}$, donde N es un número infinitamente grande.

$$\Rightarrow \text{ si se eleva } \alpha \text{ al cuadrado,s e tiene: } \alpha^2 = \left(\frac{1}{10^N}\right)^2 = \frac{1^2}{(10^N)^2} = \frac{1}{10^{2N}}$$

De lo anterior, se puede observar que: $\alpha \ll \alpha^2$ o $\frac{1}{10^N} \ll \frac{1}{(10^N)^2}$, ya que el denominador de α es una cantidad infinitamente grande. Si esa cantidad se multiplica por sí misma, el resultado será una cantidad mayor a la anterior. Por lo tanto, su recíproco será mucho menor que el recíproco de α.
Considere la siguiente suma de infinitesimales:

$$\alpha+\alpha^2$$

Ahora bien, se hará lo mismo con un número real. Se tomará el número 2, elevándolo al cuadrado y sumándose.

$$2+2^2=2+4=6$$

Observe, que en los números infinitesimales no se puede conocer el valor de la suma $\alpha+\alpha^2$ como se puede conocer el valor de la suma $2+2^2$.

Y si se mezcla la suma de un número real y un infinitesimal, se encontrará que solamente se conocer su valor real para aplicarlo en nuestro entorno tridimensional.

Esto sería:

$$2+\alpha=2, \text{ en R}$$

En cambio; si alguien quisiera saber el valor exacto y puntual de la suma 2+α, tal como se puede conocer el valor exacto y puntual de la suma de dos números reales; entonces, la siguiente expresión, describiría mejor la situación:

$$2+\alpha=? \Rightarrow \{6\}$$

Esto es debido a que no es posible conocer ese valor surgido de la inquietud anterior, a no ser que nos ubiquemos en el conjunto de los números reales.

Se traerá al tema nuevamente a los números imaginarios, en donde se intentará realizar la siguiente suma:

$$2+i=?$$

2+i es un número complejo, así:

EDUCERE - Investigación Arbitrada - ISSN: 1316-4910 - Año 25 - Nº 82 - Septiembre - Diciembre 2021 / 825 - 839

$$2+i=2+i$$

De la misma forma:

$$2+\alpha=2+\alpha$$

Esta última expresión, representa otro tipo de cantidad, distinta a los números reales.

El rescate del Cálculo infinitesimal

En 1966, (Gonzáles George, 2003, pp. 33-34) el matemático Abraham Robinson propuso una nueva teoría la cual devolvió la dignidad perdida a esta rama de las matemáticas que fue duramente criticada por los matemáticos y filósofos mencionados en el capítulo "Breve historia acerca de la polémica del Cálculo infinitesimal."

Robinson propuso un nuevo campo numérico al que llamó: "números hiperreales"; en estos números están contenidos todos los números reales, además; están contenidos los números infinitamente pequeños y los números infinitamente grandes. (Gonzáles George, 2003, p. 34). Este nuevo campo, está representado por: *. Asimismo, dicho número hiperreal se representa como: $^*r=r+\alpha$; donde "r" es el número o parte real y "α" es la parte infinitesimal o número infinitamente pequeño.

Tomemos en cuenta el siguiente número complejo y número hiperreal:

$$2+i$$

$$2+\alpha$$

Si se realiza un símil y se toma solo la parte real, se tendría que en el número complejo la parte real sería 2, y en la suma del número real más el infinitesimal, la parte real sería 2. Esto podría expresarse de la siguiente forma:

Para el número complejo:

$$\text{Sea } z=2+i \text{ , } \Rightarrow \text{Re}(z)=2$$

Para el número hiperreal:

$$\text{Sea: } {}^*r=2+\alpha$$

$$\text{Parte real: } r=2$$

Si se quiere expandir la visión y tomar la ecuación {7}, no solo considerando la parte real sino también todo lo que está involucrado con esa parte real, se tendría que escribir la suma tal cual: $2+\alpha$.

Se hace hincapié en que no se puede expresar que en la ecuación {7}, $\alpha=2$, porque esta última igualdad no se cumple. α no puede ser igual a un número real cualquiera, porque desde un principio se ha definido como un número infinitamente pequeño, mayor que cero, es decir que no se puede conocer su valor exacto como lo conocemos con el número 2. Además, se ha definido que α no existe en el conjunto numérico de los números reales, por ello es incorrecto decir que un número infinitamente pequeño es igual a un real. Si se afirma que en relación con la ecuación {7}, $\alpha=2$, se estará cayendo en una contradicción lógica.

Operando con infinitesimales

Robinson determinó que al igual que los números reales, los números hiperreales cumplen con las propiedades suficientes para ser considerados como un campo matemático (Gonzáles George, 2003, pp. 33-35) & (Ely, 2010, p. 140). Esto quiere decir que se cumplirán las propiedades suficientes que hacen que la terna: (R,x,+) al igual que la terna: (*R,x,+) tengan estructura de campo. Sin embargo, en este documento lejos de verificar si los conjuntos numéricos R y *R tienen estructura de campo, se tratará de mostrarle al lector la forma en que se comportan las 6 operaciones de la aritmética en el campo de los hiperreales y en su combinación con otros campos ya sea el de los reales o de infinitesimales de distinto orden.

Se comenzará definiendo lo que es un infinitesimal de orden "n". Un infinitesimal de segundo orden será aquél que está elevado al cuadrado. Si está elevado al cubo, será de tercer orden y así sucesivamente. (Arcos Quezada, 2011, pp. 10-12)

Cada infinitesimal de distinto orden, corresponde a un campo matemático específico. Así, los infinitesimales de segundo orden tienen la representación simbólica: **R, los de tercer orden se representan como ***R, y así sucesivamente. (Selem Ávila, 1997, pp. 13-24)

Ahora bien, entre infinitesimales del mismo orden, se pueden hacer las seis operaciones aritméticas que se pueden realizar con los números reales.

Ejemplo:

1. $\alpha+\alpha=2\alpha$
2. $\alpha-\alpha=0$
3. $\alpha*\alpha= \alpha^2$
4. $\frac{\alpha}{\alpha}=1$
5. $(\alpha)^2= \alpha^2$
6. $\sqrt{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{2}}$

Cuando operamos infinitesimales de distinto orden por medio de las seis operaciones de la aritmética, podremos darnos cuenta de que solamente se pueden desarrollar tres operaciones, (Multiplicación, división y potencia). De estas tres operaciones solamente dos operaciones (Multiplicación y división), cumplen con la cualidad de operar dos infinitesimales de distinto orden arrojando un resultado relacionado con el símbolo de igualdad y que puede ubicarse en su respectiva recta numérica correspondiente al orden del resultado del infinitesimal, sin encontrarse sumándose o sustrayéndose con infinitesimales de distinto orden. Tal como se muestra a continuación:

1. $\alpha+\alpha^2=\alpha+\alpha^2$
2. $\alpha-\alpha^2=\alpha-\alpha^2$
3. $\alpha*\alpha^2=\alpha^3$
4. $\frac{\alpha^2}{\alpha}=\propto$
5. $(\propto +\propto^2)^2 =\propto^2+2 \ \propto*\propto^2+\propto^4=\propto^2+2 \ \propto^3+\propto^4$
6. $\sqrt{\alpha +\propto^2}=(\propto +\propto^2)^{\frac{1}{2}}$

De lo anterior se puede observar que no es posible realizar la operación de suma y sustracción entre infinitesimales de distinto orden, esto es debido a que el infinitesimal de mayor orden es infinitamente pequeño respecto al infinitesimal de menor orden; y tratar de sumar o sustraer infinitesimales de distinto orden sería como tratar de sumar o sustraer números reales con números infinitesimales.

Observe que, de las 6 operaciones aritméticas, solamente el resultado de la multiplicación y la división se puede ubicar en una recta numérica correspondiente al orden del infinitesimal sin estar influenciado por la suma o sustracción de un infinitesimal de distinto orden.

EDUCERE - Investigación Arbitrada - ISSN: 1316-4910 - Año 25 - Nº 82 - Septiembre - Diciembre 2021 / 825 - 839

Ahora bien, si se combina un número real, con un infinitesimal, las operaciones se comportan de la siguiente forma:

1. $1+\alpha=1+\alpha$
2. $1-\alpha=1-\alpha$
3. $1*\alpha=\alpha$
4. $\frac{1}{\alpha}=N$; donde N es una cantidad infinitamente grande.
5. $(1+\alpha)^2=1+2\alpha+\alpha^2$
6. $\sqrt{\alpha+1}=(1+\alpha)^{\frac{1}{2}}$

Observe nuevamente que las ecuaciones que se pudieron efectuar fueron las operaciones 3, 4 y 5. Sin embargo, en la operación 5, a diferencia de las operaciones 3 y 4, el resultado es la suma de números infinitesimales de distinto orden y un real.

De aquí se puede deducir de forma axiomática que la multiplicación y la división son las únicas operaciones que se pueden relacionar con el símbolo de igualdad arrojando un resultado que puede ser representado en una recta numérica correspondiente a su respectivo conjunto numérico u orden del resultado del infinitesimal o número infinitamente grande (dependiendo de los números involucrados en la operación), sin que se encuentre sumando o sustrayendo con otro número ya sea infinitesimal o real. Esta deducción se puede observar siempre que exista en las operaciones aritméticas una combinación de números de distinto campo matemático. (R con *R, *R con **R, etc…)

¿Y, respecto al símbolo de tendencia?

Tal vez, surja también la pregunta sobre la factibilidad de usar el símbolo de tendencia cuando se manipulan cantidades reales e infinitesimales; de esta forma si se tiene la suma:

$$2+\alpha$$

Poder representarla como:

$$2+\ \alpha \rightarrow 2$$

Si se tiene una cantidad real cualquiera y se le suma una cantidad tan infinitamente pequeña que se desconozca su valor exacto, dicha suma siempre va a tender a tomar el valor exacto del número real. Por ello; es correcto usar el símbolo de tendencia para representar que la suma de un real más un infinitesimal, tiende a adoptar el valor del número real.

Además; al utilizar el símbolo de tendencia, se estará indicando implícitamente que nos encontramos en el campo numérico de los hiperreales. En caso contrario (si nos encontramos en el conjunto numérico de los reales), α no debería aparecer.

Propuesta de representación simbólica en la manipulación de números reales e infinitos.

Si se desea dar un acercamiento basado en las ideas del análisis no estándar, la notación propuesta en este apartado podría facilitar la comprensión de las cantidades infinitesimales y su convivencia con las cantidades reales. Además; se propone que se usen las siguientes representaciones simbólicas para evitar las confusiones y conflictos antes descritos, cuando se hace uso de la manipulación de números reales e infinitesimales.

Si nos ubicamos en el conjunto numérico de los hiperreales se sugiere seguir la siguiente notación:

$$^{*}r=r+\alpha$$

Si r=2, entonces la representación quedaría como:

$$^{*}r=2+\alpha \Rightarrow \{8\}$$

Si se quiere manipular solo la parte real, entonces se diría que, de la ecuación {8}, r=2.

Las siguientes representaciones, son alternativas para representar a la ecuación {8}:

$$2+\alpha=2, \text{ en}$$

$$2+\ \alpha \to 2$$

Respecto al resultado obtenido en el capítulo: "*Una demostración reveladora.*" Se tendría que:

$$0.999\ldots=1, \text{ en } \mathbb{R}$$

$$0.999\ldots+\alpha=1, \text{ en } {}^{*}\mathbb{R}$$

Para el cálculo de área bajo la curva, se sugiere la siguiente representación:

Para la diferencial de área:

$$dA = {}^{r}dA + {}^{*}dA \text{ , en } {}^{*}\mathbb{R}$$

$$dA = f(x) \cdot dx + \frac{dx \cdot dy}{2}$$

Para el área bajo la curva en un intervalo dado:

$$A_a^b f(x) = {}^{r}A_a^b f(x) + {}^{*}A_a^b f(x) \text{ , en } {}^{*}\mathbb{R}$$

$$A_a^b f(x) = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b \frac{dx \cdot dy}{2}$$

$$\text{De donde: } {}^{r}A_a^b f(x) = \int_a^b f(x) \cdot dx \text{ , es la parte real}$$

$$\wedge\, {}^{*}A_a^b f(x) = \int_a^b \frac{dx \cdot dy}{2} \text{, es la parte infinitesimal.}$$

Como solamente se puede conocer y manipular la parte real para modificar el espacio físico en que vivimos, se trabaja solamente con la parte real, teniendo conciencia de que existe una cantidad infinitamente pequeña que no se puede conocer y que está sumando y alterando, aunque sea de una forma infinitamente pequeña el resultado exacto de $dA \wedge A_a^b f(x)$. Por ello, se sugiere aplicar la siguiente notación, tanto en la práctica como en las aulas para mejorar el entendimiento entre las personas que usan estos procedimientos y evitar las confusiones descritas en el inicio de este documento:

Para el diferencial de área de una curva: ${}^{r}dA=f(x)\cdot dx$

Para el cálculo de área bajo la curva: ${}^{r}A_a^b f(x) = \int_a^b f(x) \cdot dx$

Si solo se quiere presentar la parte derecha de la diferencial o del área, se sugiere: ${}^{r}f(x)dx \wedge {}^{r}\int_a^b f(x)\, dx$.

En el artículo titulado: "*When is .999… less than 1?*" Karin y Mikhail usan la notación: f para representar el dominio de una función en el campo de los reales y f* para representar el dominio de una función en el campo de los hiperreales (Usadi Katz & G. Katz, 2010, pp. 24-25). De esta forma se hace distinción entre números reales e infinitesimales. Empero, la desventaja de usar esta notación podría ser que el alumno caiga en la mis-

EDUCERE - Investigación Arbitrada - ISSN: 1316-4910 - Año 25 - Nº 82 - Septiembre - Diciembre 2021 / 825 - 839

ma confusión que se ha estado tratado en este documento, ya que se observa que esta confusión es producto de ignorar el concepto de números hiperreales y de no haber una simbología que ofrezca una distinción clara y directa entre números reales e infinitesimales. En cambio; si se representa el dominio como: f^r, se espera que el alumno inequívocamente relacione el dominio con el conjunto de los números reales.

Las ventajas que el autor considera que tendría el usar esta notación respecto a la empleada actualmente, serían las siguientes:

- Se espera que esta notación logre unificar la interpretación de resultados obtenidos al realizar diferenciales e integrales entre los usuarios involucrados en el estudio del cálculo infinitesimal, evitando de esta forma que éstos caigan en conflicto intelectual con el uso de la notación actual tras encontrar la misma inconsistencia detectada por el obispo Berkeley (Berkeley, 2002, pp. 1-28), por Karl Marx (J. Durán, 2018) y Friedrich Engels (Engels, 1894, pp. 77-78). A su vez, fungirá como un recordatorio constante sobre la forma en que se superó esta inconsistencia ante la llegada del análisis no estándar de Robinson. (Gonzáles George, 2003, pp. 33-35).
- Al mostrar y diferenciar las cantidades infinitesimales de distinto orden con esta notación; se pretende que el alumno profundice en la comprensión del concepto y proceso para realizar diferenciales e integrales desde la perspectiva del cálculo infinitesimal, aportando a dar solución en cierta medida a la crítica emitida por Engels (1894), en la cual declara: "…hemos llegado ahora a una situación en la cual la mayoría de la gente diferencia e integra no porque entiendan lo que hace, sino por mera fe…"(p. 77-78).
- Acorde a Todorov, el cálculo basado en el concepto de límite es socialmente mejor aceptado que el cálculo basado en infinitesimales, lo cual hace que los matemáticos desarrollen sus planteamientos usando el cálculo infinitesimal y exponiendo sus resultados bajo la definición de límite (Todorov, 2001). Esta notación pretende que se genere una mejor aceptación social del cálculo infinitesimal ante los usuarios involucrados en el estudio del cálculo.

Como desventajas respecto al uso actual de la notación para representar resultados de diferenciales e integrales, podrían tenerse las siguientes:

- Podría resultar tedioso para el estudiante agregar una "r" y un "*" para representar el resultado real y la parte infinitesimal de la diferencial o integral. Lo cual podría causar un desuso de la simbología propuesta en la práctica.

Conclusiones y recomendaciones

De las dos hipótesis planteadas en el capítulo: "*Las dos hipótesis.*" Se concluye lo siguiente:

Desde la perspectiva del campo de los hiperreales; la única hipótesis acertada es aquella que dicta que la suma de un número real más un infinitesimal es aproximadamente igual al número real ya que se está cortando la exactitud del número hiperreal compuesto por una parte real y una infinitesimal.

La segunda hipótesis que sigue el argumento enseñado en las aulas de clase se toma por errada, ya que no contempla el conjunto numérico de los hiperreales, haciendo que el problema detectado por Berkeley en su ensayo titulado "*The Analyst*" persista hasta el día de hoy, causando mella o conflicto de aceptación del cálculo infinitesimal en la comunidad estudiantil.

Con la incorporación del conjunto de los hiperreales, los argumentos presentados por Berkeley, Karl Max y Engels sobre la escandalosa igualdad tratada en este documento, quedan subsanados.

Se recomienda incorporar la notación simbólica presentada en este documento para aminorar la confusión presentada entre la interacción de cantidades reales e infinitamente pequeñas en el uso del cálculo infinitesimal.

Asimismo, se recomienda que se enseñe el concepto de los números hiperreales en los cursos de cálculo dirigidos a los estudiantes de ingeniería utilizando la notación simbólica descrita en este documento, con la finalidad de generar una mejor aceptación de las cantidades infinitesimales en el alumno y que éste no genere rechazo al cálculo infinitesimal por identificar las mismas inconsistencias detectadas por los matemáticos y filósofos citados en este documento.®

Agradecimiento al profesor Efraín Soto Apolinar por sus valiosas y pertinentes observaciones

Referencias bibliográficas

Arcos Quezada, José Ismael. (2011). *Cálculo infinitesimal para estudiantes de ingeniería*. Toluca, México: Kali-Xotl.

Berkeley, George (Wilkins R., David). (2002). *The Analyst*. Dublin.

Buffa F., Peter. (Productor), & Rothschild, Mark. (Director). (1985). *Integración* [Película]. Estados Unidos de América: The Annenberg/CPB Project.

Ely, Robert. (2010). Nonstandard Student Conceptions About Infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education*, 117-146.

Engels, Friedrich. (1894). *La revolución de la ciencia de Eugenio Dühring ("Anti-Dühring").* Recuperado de https://www.marxists.org/espanol/m-e/1870s/anti-duhring/index.htm

Freudenthal, Hans. (1973). *Mathematics as an Educational Task. Dordrecht*, Holanda: Reidel Publishing Company.

González George, Kemel. (2003). Origen, destierro y renacimiento de los infinitesimales. *Revista Educación y Pedagogía*, XV (35), 29-36. Recuperado de https://revistas.udea.edu.co/index.php/revistaeyp/article/view/5941

J. Duran, Antonio. (2018). Karl Marx y el cálculo infinitesimal. El cultural. Recuperado de https://elcultural.com/Karl-Marx-y-el-calculo-infinitesimal

Sáenz de Cabezón, Eduardo. (2018). *¿Es 0'9999999… igual a 1?* Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=11dd4srNb_E

Selem Ávila, Elías. (1997). n-extensiones propias de *R de cardinales Nn. *Aportaciones matemáticas*, 13-24.

Todorov, Todor. (2001). Back to classics: Teaching Limits Through Infinitesimals. Recuperado de https://digitalcommons.calpoly.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1080&context=math_fac

Universidad Autónoma del Estado de México. (2007). *Cálculo diferencial e integral*. Toluca, México: Núñez Salazar, Joel, Contreras Garduño, Lorenzo, Gómez Tagle Fernández de Córdova, Juan Manuel, Rojas González, Jorge & Laredo Santín, Juan.

Universidad Autónoma del Estado de México. (2009). *Programa de Estudio por Competencias Cálculo 1*. Recuperado de http://fingenieria.uaemex.mx/portal/docs/coordinaciones/ICI/planF2/Calculo1ICI.pdf

Universidad Autónoma del Estado de México. (2003). *Currículum de la Licenciatura de Matemáticas Reestructuración 2003*. Toluca, México.

Universidad Nacional de México. (2005). *Mapa curricular*. Recuperado de http://www.fciencias.unam.mx/licenciatura/mapa/122/217

Usadi Katz, Karin & G. Katz Mikhail. (2010). When is .999 less than 1? *The Mathematics Enthusiast,* 7(1), 3-30.

EDUCERE - Investigación Arbitrada - ISSN: 1316-4910 - Año 25 - Nº 82 - Septiembre - Diciembre 2021 / 825 - 839